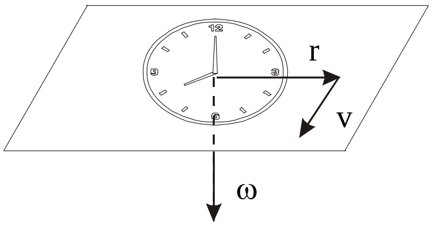
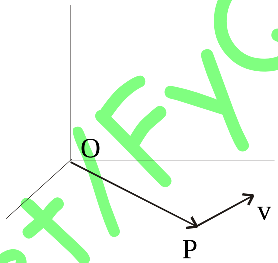
SOLUCIONES AL TEST 14



1. D. La velocidad angular ω es un vector axial que se define a partir del producto vectorial $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Para calcular el módulo de la velocidad angular se divide el ángulo recorrido por la aguja entre el tiempo empleado:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1\,rev}{1\,h} \cdot \frac{2\pi\,rad}{1\,rev} \cdot \frac{1\,h}{3600\,s} = \frac{\pi\,rad}{1800\,s}$$



2. C. Las coordenadas de *P*, origen del vector $\vec{v}$, son proporcionales a 1,5 y α significa que:

$$P = (p\ ,\ 5.p\ ,\ \alpha.p)$$

Las componentes de $\vec{v}$ son proporcionales a 1,α y β implica que:

$$\vec{v} = (v\ ,\ \alpha.v\ ,\ \beta.v)$$

El momento del vector respecto del origen es:

$$\vec{M}_O = O\vec{P} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p & 5p & \alpha p \\ v & \alpha v & \beta v \end{vmatrix} = i.(5pv\beta - \alpha^2 pv) + j(\alpha pv - pv\beta) + k(\alpha pv - 5pv)$$

Los momentos respecto de los ejes de coordenadas son las respectivas componentes de este vector, que son proporcionales a 1,2 y 3, o sea:

En el eje *X* $\quad m = 5pv\beta - \alpha^2 pv$

En el eje *Y* $\quad 2m = \alpha pv - pv\beta$

En el eje *Z* $\quad 3m = \alpha pv - 5pv$

Si buscamos resolver el test de forma rápida se sustituyen los resultados de las 4 opciones y se comprueba que es la opción C la que verifica estas tres ecuaciones. De ellas se deduce además que *m*=0.

Si modificamos el sistema anterior, simplificando previamente $m/pv = k$ quedan:

En el eje *X* $\quad k = 5\beta - \alpha^2$.

En el eje *Y* $\quad 2k = \alpha - \beta$

En el eje *Z* $\quad 3k = \alpha - 5$ $\quad$ de esta ecuación $\quad \alpha = 3k+5$

Si restamos la ec. *Z* de la del *Y* queda

$$k = -5 + \beta \qquad \beta = k + 5$$

Al sustituir α y β en la ecuación del eje X da una ecuación de 2º grado:

$$9.k^2 + 26.k = 0 \qquad k\ .\ (9\ k + 26) = 0$$

Cuyas soluciones son dos:

$$k = 0 \quad ; \quad k = -\,2{,}89$$

Para *k*=0 se tiene que *m*=0 con lo que

$$\alpha = 5 \text{ y } \beta = 5.$$

Para *k*=-2,89 se tiene que:

$$\alpha = -3{,}67 \text{ y } \beta = 2{,}11.$$

3. B. Las ecuaciones de la posición son:

Eje X $x = 2\,t - 3$

Eje Y $y = (\,2\,t - 3)^2 - 9$

Las ecuaciones de la velocidad son entonces:

$$V_x = 2 \;\; ; \;\; V_y = dy/dt = 2.(2\,t - 3).2 = 8\,t - 12$$

Para un tiempo t=2 se obtiene

$$V_x = 2 \qquad V_y = 4$$

El vector velocidad (2,4) es tangente a la trayectoria y el vector aceleración normal debe ser perpendicular a ella. Un vector así debe tener componentes proporcionales a (-4,2) que resultan de cambiar el orden de las componentes anteriores y una de ellas de signo. Esta condición sólo la cumple la respuesta B.

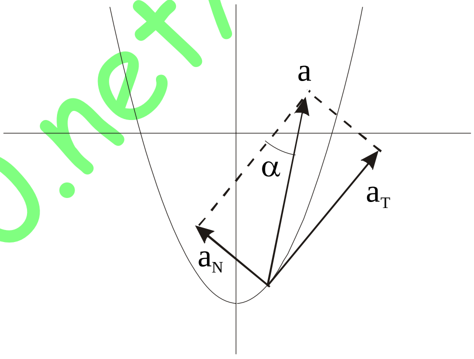
Para resolver bien la cuestión tenemos que demostrar que el vector perpendicular a la velocidad y en la dirección del centro de curvatura es (-4,2) y no (4,-2). Para ello dibujemos la trayectoria

$$y = x^2 - 9$$

que corresponde a una parábola cuyo vértice se encuentra en (0,-9)

En t = 2 el móvil se halla en

$$x = 1 \;\; ; \;\; y = -8$$



En la gráfica adjunta se ha representado esa situación. El vector $\vec{a}_T$ tiene las misma dirección que el vector $\vec{v}$ y el vector $\vec{a}_N$ está dirigido hacia el centro de curvatura de la trayectoria. Como se puede observar del dibujo las componentes de la aceleración normal no pueden ser proporcionales a (4,-2), sino en todo caso a (-4,2).

Para calcular el valor de la aceleración normal, se deduce del gráfico:

$$|\vec{a} \times \vec{v}| = a.v.\text{sen}\,\alpha \quad ; \quad a_N = a\,.\,\text{sen}\,\alpha = a\,.\,\frac{|\vec{a} \times \vec{v}|}{a.v}$$

La aceleración se obtiene de derivar la velocidad:

$$a_X = \frac{dv_X}{dt} = \frac{d}{dt}(2) = 0 \quad ; \quad a_Y = \frac{dv_Y}{dt} = \frac{d}{dt}(8t - 12) = 8$$

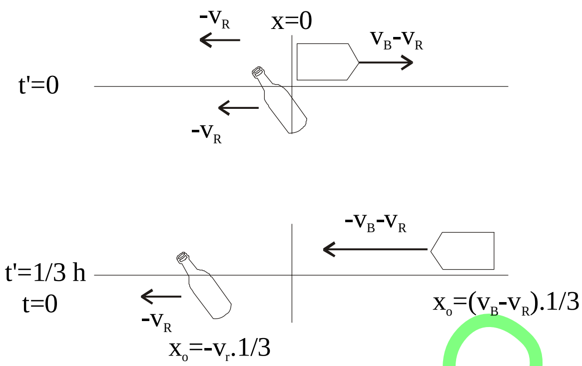
Con estos valores y los calculados antes de v se obtiene a_N:

$$a_N = \frac{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{16}{\sqrt{20}}$$

Para calcular el vector $\vec{a}_N$ se multiplica su módulo anterior por el versor obtenido a partir del vector (-4,2), que ya se sabe que posee la dirección y sentido de $\vec{a}_N$:

$$\vec{a}_N = a_N.\hat{a}_N = \frac{16}{\sqrt{20}}.\frac{(-4i + 2j)}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{8}{5}.(-2i + j)$$

4. B. Los movimientos de la barca como el de la botella son rectilíneos y uniformes.



En el gráfico adjunto se observa que el criterio de signos es positivo a la derecha, la corriente del río va hacia la izquierda y el origen de coordenadas está en el puente. Las unidades empleadas son millas y horas. Para escribir sus ecuaciones a partir de los veinte minutos, momento en el que pondremos el reloj con $t = 0$ cuando los dos viajan en el mismo sentido, tenemos que calcular qué posición que ocupan en ese momento.

La botella viaja con la velocidad de la corriente y estará en

$$x_o = - v_R.\ 1/3$$

La barca viaja con velocidad ($v_B - v_R$) y estará en

$$x_o = (v_B - v_R)\ .\ 1/3$$

A partir de los veinte minutos (1/3 h) la botella sigue con velocidad $- v_R$ y ahora la barca viaja a $(- v_R - v_B)$, luego las ecuaciones $x=x_o+v.t$ son:

Botella : $x_1 = - v_R.\ 1/3 - v_R\ .\ t$

Barca: $x_2 = (v_B - v_R)\ .\ 1/3 + (- v_R - v_B)\ .\ t$

Igualando ambas expresiones se calcula el tiempo del encuentro:

$$- v_R.\ 1/3 - v_R\ .\ t = (v_B - v_R)\ .\ 1/3 + (- v_R - v_B)\ .\ t$$

$$t = 1/3\ h$$

Si sustituimos ahora en la ecuación de la botella este tiempo y sabiendo del enunciado que x_1=1 *milla* obtenemos la velocidad de la corriente :

$- 1 = - v_R.\ 1/3 - v_R\ .\ 1/3$; $v_R = 3/2 = 1{,}5\ millas/h$

5. B. El movimiento del objeto es uniformemente acelerado. Si consideramos positivo el sentido ascendente:

$$y_o = 0\ m \qquad v_o = +\ 100\ m/s \qquad a_Y = g = -\ 10\ m/s^2.$$

La ecuación del objeto es : $y = 100\ .\ t - 5\ .\ t^2$. Sustituyendo $y=h$ sale:

$$t_2 = \frac{100 + \sqrt{100^2 - 20.h}}{10} \quad ; \quad t_1 = \frac{100 - \sqrt{100^2 - 20.h}}{10}$$

Puesto que $t_2 - t_1 = 10$, restando ambas expresiones queda:

$$100 = 2.\sqrt{100^2 - 20.h} \quad ; \quad 50^2 = 100^2 - 20.h \quad ; \quad h = 375\ m$$

6. A. En el punto más alto del rizo, el objeto debe poseer una velocidad mínima para que la fuerza centrípeta sea debida sólo al peso. Si se supera esa velocidad el plano del rizo responderá con una fuerza normal, y si no se alcanza esa velocidad, antes de llegar al cenit del rizo se despega de la pista y hace una trayectoria parabólica.

$$F_{CP}=F_{PESO} \qquad m.v^2/R = m.g \qquad v^2=Rg$$

Si consideramos la conservación de la energía entre el punto inicial del plano inclinado y el punto más alto del rizo:

$$mgh = mg.2R + ½.m.v^2$$

sustituyendo $v^2=Rg$

$$gh = g.2R + ½\ Rg \qquad h = 2R + ½\ R = 5/2\ R$$

7. C. Esta ecuación $a = \alpha\ .\ R$, sólo es aplicable al caso de que el cilindro ruede perfectamente sin deslizar.

8. D. La aceleración respecto de unos ejes no inerciales (ascensor) es igual a la que hay respecto de otros inerciales (el suelo en primera aproximación) menos la de arrastre, o sea la que posee el sistema no inercial respecto del inercial (en este caso la del ascensor respecto del suelo). Si se toma criterio positivo hacia abajo:

$$a_{SNI} = a_{SI} - a_{ARRASTRE} = g - (-a) = g + a$$

9. C. La explosión surge de unas fuerzas interiores que por ser iguales dos a dos por el principio de acción reacción, se anulan entre ellas y no modifican la trayectoria del centro de masas. Las únicas fuerzas que determinan la trayectoria del centro de masas de un sistema son las exteriores: la del peso y la del rozamiento en este caso.

10. B. En un sistema equilibrado la suma de fuerzas y la de momentos de estas fuerzas debe ser cero:
Tomando signo positivo hacia arriba:

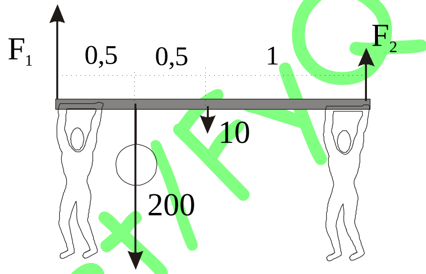
$$F_1 + F_2 - 200 - 10 = 0$$

Los momentos respecto del borde izquierdo:

$$200 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 1 - 2 \cdot F2 = 0$$

Resolviendo el sistema se logra:

$$F_1 = 155\ Kp\ ;\ \ F_2 = 55\ Kp.$$



11. A. La cadena que cuelga posee 1 *Kg* de masa y tiene 0,5 *m* de largo. Para subirla tendremos que mover su centro de masas situado 0,25 *m* por debajo del nivel de la mesa:

$$W = \Delta E_P = m.g.h = 1\ Kg \cdot 10\ m/s2 \cdot 0{,}25\ m = 2{,}5\ J$$

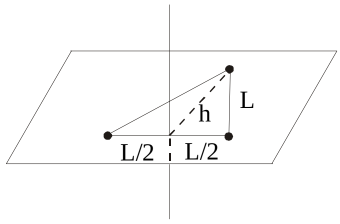
12. B. Las distancias de las partículas al eje de giro son *L*/2, *L*/2 y *h* donde:

$$h = L \cdot sen\ 60º = L \cdot \sqrt{3}/2$$

Entonces el momento de inercia del sistema es:

$$I = \Sigma\ m_i \cdot r_i^2$$

$$I = m.(L/2)^2 + m.(L/2)^2 + m.(L.\sqrt{3}/2)^2 = 5/4\ m.L^2$$



13. D. Puesto que pueden ser infinitos los ejes en torno a los que gire. Debido a la simetría de la figura, cualquiera de estos ejes tendrá otro eje paralelo que pase por el centro de masas de la esfera. Para calcular el momento de inercia respecto al eje que no pase por el centro de masas se podrá aplicar el teorema de Steiner:

$$I = 2/5.M.R^2 + M \cdot D^2$$

siendo *D* la distancia entre ejes.

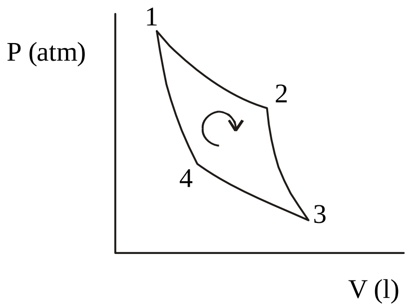
14. B. Dos procesos isotermos:

(1 – 2) y (3 – 4)

dos adiabáticos:

(2 – 3) y (4 – 1)

en un ciclo de Carnot.



15. B. El incremento de Energía potencial se convertirá en calor:

$$\Delta E_P = m \cdot g \cdot \Delta h = 1\ Kg \cdot 9{,}8\ m/s^2 \cdot 100\ m = 980\ J = 234{,}45\ cal$$

$$\Delta T = \frac{Q}{m.C_e} = \frac{234{,}45\ cal}{1000\ g \cdot 1\ cal/g \cdot ºC} \approx 0{,}24\ ºC$$

16. D. Desde el punto de vista de un sistema inercial el satélite realiza un movimiento circular y uniforme cuya fuerza centrípeta es de naturaleza gravitatoria:

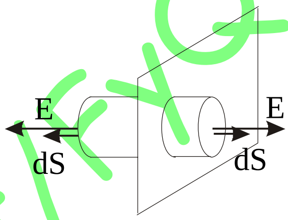
$$F_G = m.a_{CP} \Leftrightarrow \frac{G.M.m}{r^2} = m.\omega^2.r = m.\frac{4\pi^2}{T^2}.r \Leftrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$$

puesto que el resultado aparece en función de g, se hace el cambio:

$$g = \frac{G.M}{R^2} \quad \Leftrightarrow \quad G.M = g.R^2$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{R^2.g} \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{2.\pi}{R.\sqrt{g}}.r^{\frac{3}{2}}$$

17. C. Si se supone el plano como infinito, las líneas de campo serán paralelas e igual de espaciadas unas de otras, como corresponde a campos uniformes de valor constante.



Si se aplica pues el teorema de Gauss a una superficie cilíndrica imaginaria, sólo existirá flujo a través de las superficies de sus bases, ya que en la ellas el campo y el vector $d\vec{S}$ serán perpendiculares. Dicho de otra forma, las líneas de campo sí atraviesan perpendicularmente las tapas del cilindro, mientras que sólo rozan o son paralelas a la superficie lateral.

$$\phi = \frac{q}{\varepsilon} = \oint_S \vec{E}\,.\,d\vec{S} = \oint_S E\,.\,dS\,.\cos\alpha = E.S + E.S = 2\,.\,E\,.\,S_{BASE}$$

Si se define la densidad de superficial de carga del plano como $\sigma = q/S$ se obtiene:

$$\frac{q}{\varepsilon} = 2.E.S \quad \Leftrightarrow \quad E = \frac{q}{2.\varepsilon.S} = \frac{\sigma}{2.\varepsilon}$$

18. B. Si como dice el enunciado $r >> a$ entonces se puede aproximar $\theta = \theta_1$ con lo que:

$r_+ = r - a/2\,.\cos\theta \qquad r_- = r + a/2\,.\cos\theta$

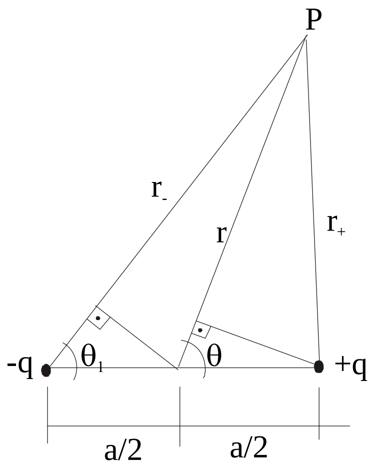
$$V_* = \frac{K.q}{r - \frac{a}{2}.\cos\theta} \quad ; \quad V_- = \frac{K.q}{r + \frac{a}{2}.\cos\theta}$$

Si se aplica el principio de superposición:

$$V = V_* + V_- = Kq\,.\frac{r + \frac{a}{2}.\cos\theta - r + \frac{a}{2}.\cos\theta}{r^2 - \frac{a^2}{4}.\cos^2\theta}$$

Por aproximación, ya que $r>>a$ se tiene que $r^2 - \frac{a^2}{4}.\cos^2\theta \approx r^2$ y queda:

$$V = \frac{K.q.a.\cos\vartheta}{r^2} = \frac{q.a.\cos\vartheta}{4.\pi.\varepsilon.r^2}$$



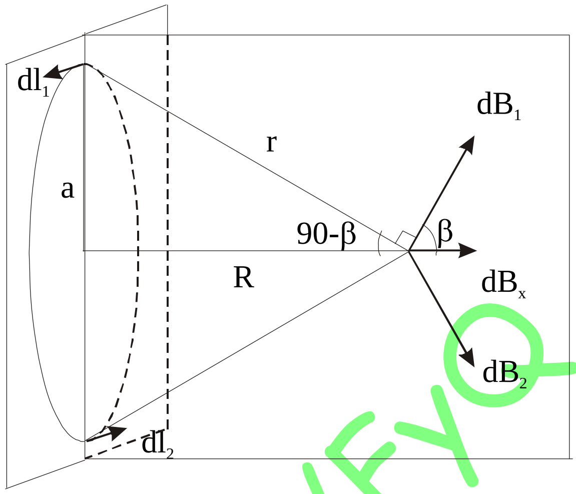
19. D. Ya que en los conductores las cargas se mueven con total libertad y por repulsión tienden a colocarse en la superficie del mismo para estar lo más separadas posible.

20. D. Se aplica la ley de Biot-Savart para calcular el campo $d\vec{B}$ creado por un trozo de hilo $d\vec{l}$ atravesado por una corriente i en un punto que se encuentra a una distancia $\vec{r}$ de él:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o . i . d\vec{l} \times \vec{r}}{4.\pi.r^3}$$

En este caso el vector $\vec{r}$ es perpendicular al vector $i.d\vec{l}$, con lo que el módulo de $d\vec{B}$ es:

$$dB = \frac{\mu_o . i . dl . r . \text{sen } 90}{4.\pi.r^3} = \frac{\mu_o . i . dl}{4.\pi.r^2}$$



A su vez el vector $d\vec{B}$ por definición del producto vectorial es también perpendicular a los vectores anteriores.

Como se observa en la figura, cada trozo de hilo tiene otro simétrico a él, de forma que las componentes verticales de los campos elementales que crean se anulan entre sí. Entonces lo que se tiene que calcular es la suma de las componentes horizontales:

$$dB_X = dB . \cos\beta = dB . \text{sen } (90-\beta) = \frac{\mu_o . i . dl}{4.\pi.r^2} . \frac{a}{r}$$

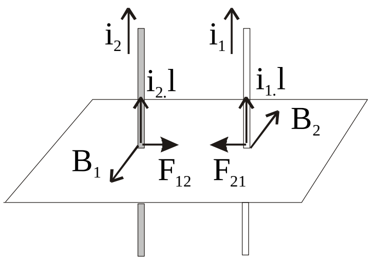
$$B_X = \int dB_X = \int \frac{\mu_o . i . dl}{4.\pi.r^2} . \frac{a}{r} = \frac{\mu_o . i}{4.\pi} . \frac{a}{r^3} \int dl = \frac{\mu_o . i}{4.\pi} . \frac{a}{r^3} . 2.\pi.a$$

Simplificando la expresión anterior y sustituyendo r por Pitágoras:

$$r = \sqrt{a^2 + R^2} \quad ; \quad B_X = \frac{\mu_o . i . a^2}{2.\left(a^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

21. A. La fuerza por unidad de longitud con que interactúan dos conductores infinitamente largos es:

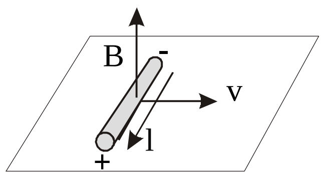
$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_o . i_1 . i_2}{2.\pi.d} = \frac{4.\pi.10^{-7}.2.2}{2.\pi.2.10^{-2}} = 4.10^{-5}\ N/m$$



Al aplicar la fórmula $\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}$ de se observa que esta fuerza es atractiva si las corrientes son del mismo sentido.

22. A. La fuerza electromotriz producida en un conductor de longitud $\vec{l}$ atravesado que se mueve con velocidad v el seno de un campo magnético B es:

$$\varepsilon = (\vec{v} \times \vec{B}).\vec{l}$$



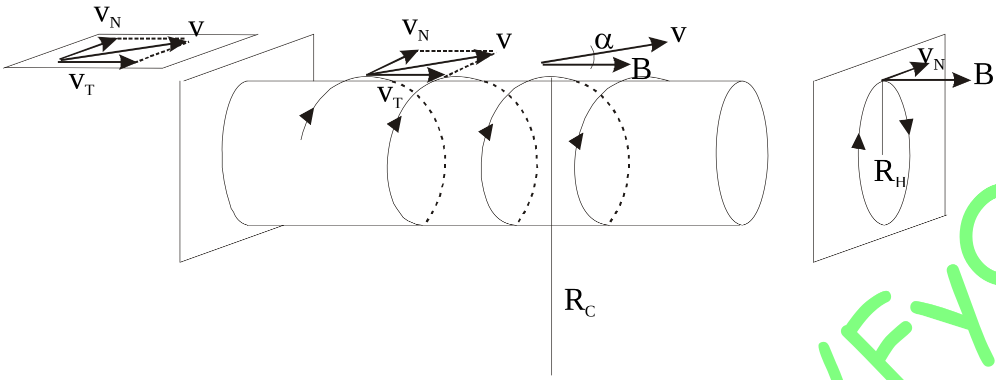
En el gráfico se observa la polaridad del conductor.

En este caso :

$$\text{v} = \frac{d}{dt}(\text{d}) = \frac{d}{dt}(\text{t}+1) = 1\ m/s$$

$$\varepsilon = (1 . 4.10^{-2} . \textit{sen } 90) . 0{,}4 . \textit{cos } 0 = 16.10^{-3}\ V$$

23. D. Si una partícula cargada penetra en un campo magnético con una velocidad paralela al campo, su trayectoria sigue recta al no sufrir fuerza por parte del campo. Si la velocidad es perpendicular al campo el movimiento es circular. Si no ocurre ni lo uno ni lo otro la velocidad se puede descomponer en suma de dos vectores: uno paralelo y



otro perpendicular al campo. Si se superponen los dos movimientos el rectilíneo y el circular, la trayectoria es entonces helicoidal (Principio de Galileo para la composición de movimientos).

La fuerza de Lorentz: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ que rige este movimiento es perpendicular a la velocidad al estar definida por un producto vectorial y produce por tanto una aceleración normal a la trayectoria, de valor:

$$a_N = \frac{F}{m} = \frac{q.v.B.\text{sen}\,\alpha}{m}$$

Conviene aclarar la diferencia entre el radio de curvatura de la trayectoria helicoidal R_C y el radio de la hélice R_H.

El radio de curvatura R_C se obtiene combinando la expresión cinemática $a_N = v^2/R_C$ con la anterior, siendo v^2 el módulo de la velocidad al cuadrado:

$$R_C = \frac{m\,.\,v}{q\,.\,B\,.\,\text{sen}\,\alpha}$$

El radio de la hélice R_H es el del círculo que proyecta ésta sobre un plano perpendicular al eje de revolución de la hélice. Para calcularlo supongamos que el sistema de referencia elegido se moviese solidariamente con la partícula a una velocidad $\vec{v}_T$. Desde este punto de vista la partícula se movería con una velocidad $\vec{v}_N$ y sólo se observaría el movimiento circular:

$$F = q\,.\,v_N\,.\,B\,.\,sen\,90 = m\,.\,a_N = m\,.\,v_N^2\,/\,R_H$$

Como $\quad v_N = v\,.\,sen\,\alpha \quad$ se despeja y resulta :

$$R_H = \frac{m\,.\,v_N}{q\,.\,B} = \frac{m\,.\,v\,.\,\text{sen}\,\alpha}{q\,.\,B}$$

Dado que el seno de un ángulo está comprendido entre 0 y 1 se puede observar que el radio de curvatura es mayor siempre que el de la hélice. Si α=0º, R_C es infinito como corresponde a una recta y R_H es cero ya que el círculo de la hélice sería un punto. Si α=90º los dos radios coinciden.

Con los datos del enunciado se obtiene:

$$R_H = \frac{2.10^{-28}\ Kg\,.\,2.10^{7}\ m/s\,.\,\sqrt{3}/2}{1.10^{-19}\ C\,.\,\sqrt{3}\,T} = 0{,}02\ m$$

24. A. La sensación sonora en decibelios es

$$S = 10 \,.\, \log \frac{I}{10^{-12}} \,,$$

con los datos de la cuestión:

$$100 = 10 \,.\, \log \frac{I}{10^{-12}}$$

y si se aumenta al doble la Intensidad habrá una nueva sensación:

$$S' = 10 \,.\, \log \frac{2 \,.\, I}{10^{-12}} = 10 \,.\, \log \frac{I}{10^{-12}} + 10 \,.\, \log 2 = 100 + 10 \,.\, 0{,}3 = 103 \, dB$$

luego se habrá aumentado en (103 – 100) *dB* = 3 *dB*

25. C. La frecuencia de un M.A.S. es:

$$f = \frac{1}{2.\pi} \cdot \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{2.\pi} \cdot \sqrt{\frac{8}{2}} = \frac{2}{2.\pi} = \frac{1}{\pi} \, Hz$$