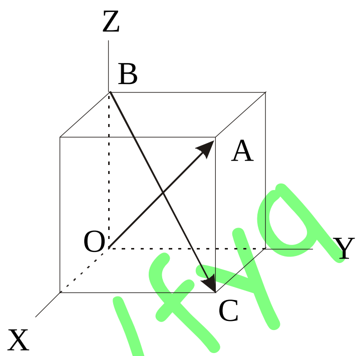
1.- C La derivada de Q respecto de t vale:

$$\frac{dQ}{dt} = 2.t.i - 3.j + 3.t^2.k$$

Si este vector es perpendicular a P el producto escalar entre ellos debe ser cero:

$$P\,.\frac{dQ}{dt} = 2.t.3 - 3.4 + 3.t^2.0 = 0 \;\Leftrightarrow\; 6.t - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 2$$



2.- C Si consideramos por simplicidad el lado del cubo como la unidad, entonces las coordenadas de los vértices son :

O = (0,0,0) A = (1,1,1)
B = (0,0,1) C = (1,1,0)

Los vectores y sus módulos son:

$$\overrightarrow{OA} = (1{,}1{,}1) \;\Leftrightarrow\; \left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{BC} = (1{,}1{,}-1) \;\Leftrightarrow\; \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{3}$$

Con la definición del producto escalar entre ellos deducimos el ángulo que forman:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{1.1 + 1.1 + 1.(-1)}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \alpha = 70^{o}\,31'\,44''$$

3.- D El momento de una fuerza respecto a un punto se define como

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

y por lo tanto se trata de una magnitud vectorial. Por otra parte, el momento de una fuerza respecto a un eje se obtiene proyectando sobre el eje dado, el momento de la fuerza respecto a un punto cualquiera de este eje,

$$M = \vec{\tau}_0 \cdot \vec{u}$$

siendo $\vec{\tau}_0$ el momento de la fuerza respecto a un punto 0 del eje y $\vec{u}$ un vector unitario en la dirección del eje.

4.- C Al multiplicar vectorialmente dos vectores, se obtiene un vector cuyo módulo es el área del paralelogramo determinado por ambos vectores. Al multiplicar escalarmente el vector obtenido por otro vector se obtiene un escalar que nos proporciona el volumen del paralelepípedo cuyas aristas están definidas por los vectores anteriores.

5.- A. El vector gradiente de un escalar se define como:

$$\overrightarrow{grad}\;A = \frac{\partial A}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial A}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{k}$$

podemos calcular el vector gradiente de la magnitud A, obteniendo:

$$\overrightarrow{grad}\ A = (2xy + 3yz)\vec{i} + (x^2 + 3xz)\vec{j} + (3xy - 6z)\vec{k}$$

El valor de este vector en el punto (0,1,0) es:

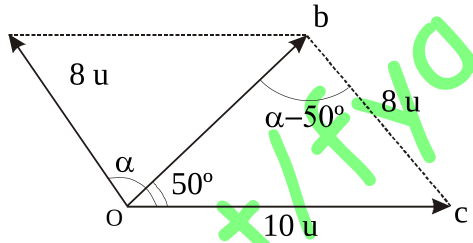
$$\overrightarrow{grad}\ A_{(0,1,0)} = \vec{j}$$

cuyo módulo es uno.

6.- B. El momento de inercia es un tensor.

7.- C Es la ecuación de un movimiento circular uniforme. La velocidad es perpendicular al radio (A) y su valor es en módulo Aω.

8.- A En el triángulo OBC de la figura podemos aplicar el teorema de los senos:



$$\frac{8}{sen 50^o} = \frac{10}{sen(\alpha - 50^o)}$$

de la que se deduce que

$$sen(\alpha - 50^o) = \frac{10\cancel{u}\, sen 50^o}{8\cancel{u}}$$

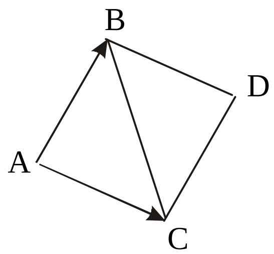
y por lo tanto

$$\alpha - 50^o = 73{,}25^o \quad \Rightarrow \quad \alpha = 123{,}25^o$$

9.- D Calcularemos las componentes del vector AB:

$$\overrightarrow{AB} = (0-1, 0-3, 2-1) = -\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$

de forma análoga procederemos para calcular el valor del vector AC:



$$\overrightarrow{AC} = (1-1, 0-3, 0-1) = -3\vec{j} - \vec{k}$$

el módulo del producto vectorial de los vectores AB y AC nos proporciona el área del paralelogramo ABCD; si queremos calcular el área del triángulo ABC, basta con dividir por dos el área del paralelogramo, por lo tanto

$$Área = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

el producto vectorial lo calcularemos desarrollando el siguiente determinante:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

el módulo del vector que se obtiene es

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{36 + 1 + 9} = \sqrt{46}\, u^2$$

en consecuencia el área del triángulo es

$$Área = \frac{1}{2}\sqrt{46}\, u^2 = 3{,}39\ u^2$$

10.- A Si tenemos en cuenta que la velocidad es la variación del vector de posición con respecto al tiempo y la aceleración es la variación de la velocidad con respecto al tiempo, podemos hallar la aceleración de la partícula:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\left(2t^2\vec{i} + 3t\vec{j}\right)}{dt} = 4t\vec{i} + 3\vec{j}\ m/s \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(4t\vec{i} + 3\vec{j}\right)}{dt} = 4\vec{i}\ m/s^2$$

la fuerza a la que está sometida la partícula es

$$\vec{F} = m{\cdot}\vec{a} = 10\,kg\,4\vec{i}\ m/s^2 = 40\vec{i}\ N$$

el momento de la fuerza, M, respecto al origen es

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

al igual que se hizo en el problema anterior, calcularemos el vector que resulta de multiplicar vectorialmente el vector de posición con el vector fuerza:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2t^2 & 3t & 0 \\ 40 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -120t\vec{k}\ N.m$$

11.- C Los vectores libres son los que tienen las mismas componentes, y su punto de aplicación y dirección puede ser cualquiera. Los deslizantes son los que poseen igual las componentes y la dirección es una única recta, pudiendo variar su punto de aplicación.

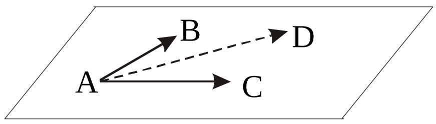
12.- D. Un campo de fuerzas es conservativo si es irrotacional, o sea:

$$rot\ \vec{F} = \vec{0} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ 2xy & x^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.i + 0.j + (2x - 2x)k = \vec{0}$$

13.- A. Si están en un plano el vector $\vec{AD}$ es combinación lineal de $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ lo que quiere decir que:

$$\overrightarrow{AD} = \alpha.\overrightarrow{AB} + \beta.\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \alpha.\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + \beta.\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)$$



Si lo llevamos todo al mismo miembro y sacamos factor común:

$$\vec{0} = \vec{OA}.(1 - \alpha - \beta) + \vec{OB}.(\alpha) + \vec{OC}.(\beta) + \vec{OD}.(-1)$$

La expresión del enunciado es:

$$\vec{0} = \overrightarrow{OA}.(a) + \overrightarrow{OB}.(b) + \overrightarrow{OC}.(c) + \overrightarrow{OD}.(d)$$

Si comparamos ambas expresiones e igualamos los coeficientes de los vectores:

$$(1 - \alpha - \beta) = a \ ; \ (\alpha) = b \ ; \ (\beta) = c \ ; \ (-1) = d$$

Si sumamos todos los miembros de la izquierda por un lado y todos los de la derecha por otro queda la expresión:

$$a + b + c + d = 0$$

14.- B. La expresión de un triple producto vectorial entre vectores es:

$$\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \\ \vec{v}_1 . \vec{v}_2 & \vec{v}_1 . \vec{v}_3 \end{vmatrix}$$

Se calcula entonces antes los productos escalares ahí expresados:

$v_1 . v_2$ = (1,1,1) . (1,0,-1) = 1 – 1 = 0

$v_1 . v_3$ = (1,1,1) . (1,-1,1) = 1 – 1 + 1 = 1

$$\vec{v}_1 \times \left(\vec{v}_2 \times \vec{v}_3\right) = \begin{vmatrix} \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{v}_2 = (1,0,-1) = \vec{v}_4$$

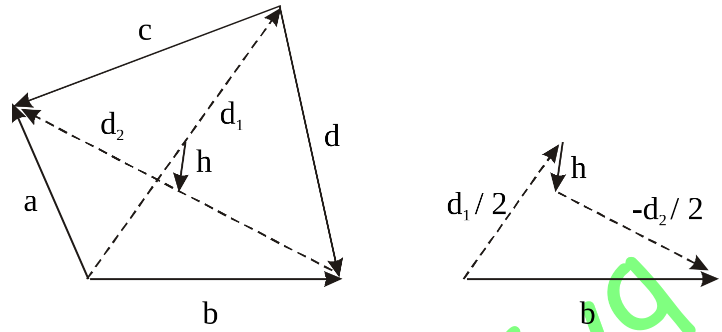
15.- B. De la figura se puede deducir que:

$$\vec{a} - \vec{c} = \vec{d}_1$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}_2$$

$$\vec{c} - \vec{d} = \vec{d}_2$$

$$\vec{b} - \vec{d} = \vec{d}_1$$



$$\frac{\vec{d}_1}{2} + h - \frac{\vec{d}_2}{2} = \vec{b}$$

$$\vec{h} = \frac{\vec{d}_2}{2} + \vec{b} - \frac{\vec{d}_1}{2} = \frac{1}{2}.\left(\vec{d}_2 + 2.\vec{b} - \vec{d}_1\right) = \frac{1}{2}.\left[\left(\vec{c} - \vec{d}\right) + 2.\vec{b} - \left(\vec{b} - \vec{d}\right)\right]$$

$$\vec{h} = \frac{1}{2}.\left(\vec{c} + \vec{b}\right)$$

Como $\vec{a} + \vec{d} - \vec{c} - \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} + \vec{d} = \vec{c} + \vec{b}$ entonces:

$$\vec{h} = \frac{1}{4}.\left(\vec{c} + \vec{b}\right) + \frac{1}{4}.\left(\vec{c} + \vec{b}\right) = \frac{1}{4}.\left(\vec{c} + \vec{b}\right) + \frac{1}{4}.\left(\vec{a} + \vec{d}\right)$$

Finalmente: $\vec{h} = \frac{1}{4}.\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\right)$

16.- A $\vec{V} = d\vec{a}/dt = \text{-}2.\text{sen } t\,\hat{i} + 2.\cos t\,\hat{j} + 4.\cos 2t\,\hat{k}$ Para calcular el módulo:

$$V = \sqrt{(\text{-}2.\text{sen } t)^2 + (2.\cos t)^2 + (4.\cos 2t)^2} =$$

$$= 2.\sqrt{(\text{sen } t)^2 + (\cos t)^2 + (2.\cos 2t)^2} = 2.\sqrt{1 + (2.\text{sen } 2t)^2} =$$

$$= 2.\sqrt{1 + (2.\text{sen } 45)^2} = 2.\sqrt{1 + \left(2.\sqrt{2}/2\right)^2} = 2.\sqrt{1+2} = 2.\sqrt{3}$$

17.- C $\cos\alpha = \dfrac{10}{\sqrt{10^2 + 10^2 + 10^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{300}} = \dfrac{10}{10.\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = tan\,(30^o)$

18.- A El momento respecto de un punto resulta del producto vectorial:

$$\vec{M}_O = O\vec{P} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -18i + 27.k$$

$$\vec{M}_{O'} = O'\vec{P} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3-2 & -6-3 & 2-1 \\ 6 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -33i + 2.j + 51.k$$

19.- C Para calcular el momento de vector $\vec{v}$ respecto de un eje primero se calcula el que tendría respecto a un punto cualquiera del eje. Este punto lo obtenemos de la ecuación en forma continua de la recta-eje que es:

$$\frac{x - x_Q}{u_X} = \frac{y - y_Q}{u_Y} = \frac{z - z_Q}{u_Z}$$

aquí Q es un punto de la recta de coordenadas (x_Q,y_Q,z_Q) y el vector director de la recta es $\vec{u}$ de componentes (u_X,u_Y,u_Z). Entonces Q=(2,5,3) y $\vec{u}$ =(2,3,6).
Entonces el momento de $\vec{v}$ respecto de Q es:

$$\vec{M}_Q = Q\vec{P} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3-3 & 1-5 & 2-3 \\ 3 & -6 & 8 \end{vmatrix} = -38.i - 3.j + 12.k$$

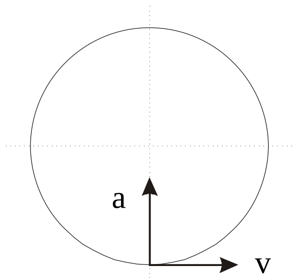
Ahora se proyecta este vector sobre el eje, multiplicándolo escalarmente por el versor del eje:

$$M_{EJE} = \vec{M}_Q . \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = (-38.i - 3.j + 12.k).\frac{(2.i + 3.j + 6.k)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = -\frac{13}{7}$$

20.- B $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\,w.\text{sen}\; wt\,.\,i + w.\cos\; wt\,.\,j$

$$\vec{v}\,.\,\vec{a} = -\,w.\text{sen}\; wt\,.\cos\; wt \;+ w.\cos\; wt\,.\,\text{sen}\; wt = 0$$

Si el producto escalar de los dos vectores vale cero es porque son perpendiculares.



Se observa que el módulo de la aceleración es constante:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{(w.\cos\, wt)^2 + (w.\text{sen}\, wt)^2} = w$$

pero no su valor como vector ya que las componentes cambian con el tiempo.

La ecuación corresponde a un movimiento circular uniforme que comienza en el punto más inferior del círculo.

21.- C

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = i + 7\,j + 4\,.\,k$$

22.- A

$$\vec{AB}=[1-3\,,2-(-1)\,,1-2\;]=(-2\,,3\,,-1)\;\;;\vec{CA}=[3-1\,,-1-1\,,2-2]=(2\,,-2\,,0)$$

$$\vec{M}=\vec{CA}\times\vec{AB}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=2i+2j+2k$$

23.- C Las coordenadas de *P*, origen del vector $\vec{v}$, son proporcionales a 1,5 y α significa que:

$$P=(p\,,5.p\,,\alpha.p)$$

Las componentes de $\vec{v}$ son proporcionales a 1,α y β implica que:

$$\vec{v}=(v\,,\alpha.v\,,\beta.v)$$

El momento del vector respecto del origen es:

$$\vec{M}_O=\vec{OP}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ p & 5p & \alpha p \\ v & \alpha v & \beta v \end{vmatrix}=i.(5pv\beta-\alpha^2pv)+j(\alpha pv-pv\beta)+k(\alpha pv-5pv)$$

Los momentos respecto de los ejes de coordenadas son las respectivas componentes de este vector, que son proporcionales a 1,2 y 3, o sea:

En el eje *X* $\qquad m = 5pv\beta - \alpha^2 pv$

En el eje *Y* $\qquad 2m = \alpha pv - pv\beta$

En el eje Z $\qquad 3m = \alpha pv - 5pv$

Si buscamos resolver el test de forma rápida se sustituyen los resultados de las 4 opciones y se comprueba que es la opción C la que verifica estas tres ecuaciones. De ellas se deduce además que $m=0$.

Si modificamos el sistema anterior, simplificando previamente $m/pv = k$ quedan:

En el eje *X* $\qquad k = 5\beta - \alpha^2$.

En el eje *Y* $\qquad 2k = \alpha - \beta$

En el eje *Z* $\qquad 3k = \alpha - 5 \qquad$ de esta ecuación $\qquad \alpha = 3k+5$

Si restamos la ec. *Z* de la del *Y* queda

$$k = -5 + \beta \qquad\qquad \beta = k + 5$$

Al sustituir α y β en la ecuación del eje X da una ecuación de 2º grado:

$$9.k^2 + 26.k = 0 \qquad\qquad k\,.\,(9\,k + 26) = 0$$

Cuyas soluciones son dos:

$$k = 0 \;\;;\;\; k = -\,2{,}89$$

Para $k=0$ se tiene que $m=0$ con lo que

$$\alpha=5 \text{ y } \beta=5.$$

Para $k=-2{,}89$ se tiene que:

$$\alpha=-3{,}67 \text{ y } \beta=2{,}11.$$

24.- A

$$\vec{AP}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=(5,1,-1) \quad ; \quad \vec{AB}=(1,1,2)\ ;\ \left|\vec{AB}\right|=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$$

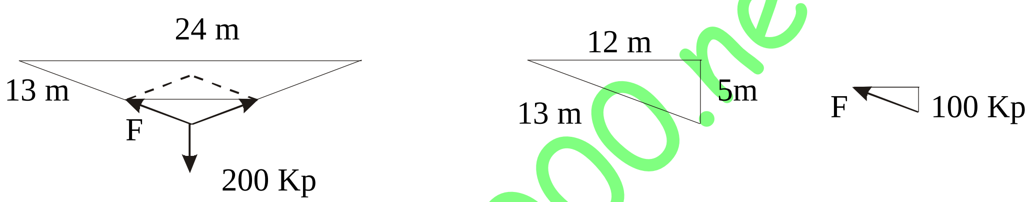
$$\left(\vec{AP}\times\vec{v}\right).\hat{AB}=(5,1,-1).\left(1/\sqrt{6},\ 1/\sqrt{6},\ 2/\sqrt{6}\right)=\frac{5+1-2}{\sqrt{6}}=4/\sqrt{6}$$

25.- A

$$\vec{M}_o=\vec{OB}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=(-2,1,-4)\ ;\ \vec{a}\times\vec{M}_o=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & 1 & 4\end{vmatrix}=(2,4,0)$$

26.- C

Por semejanza de triángulos podemos dibujar el siguiente esquema:



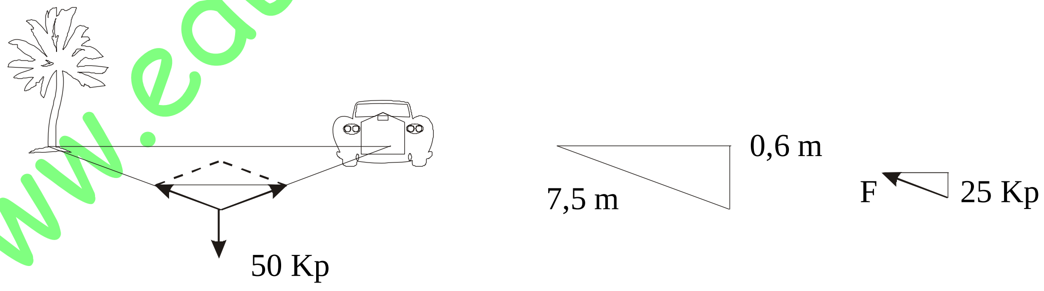
Si aplicamos Pitágoras al triángulo central de la figura de arriba se tiene:

$$h=\sqrt{13^2-12^2}=5$$

Por una proporcionalidad entre los triángulos:

100 *Kp* / F = 5 *m* / 13 *m* despejando $T = 13 \,.\, 100\ Kp / 5 = 260\ Kp$

27.- D. Por semejanza de triángulos como se observa en la figura se puede establecer una proporción:



$$\frac{F}{25\ Kp}=\frac{7{,}5\ m}{0{,}6\ m} \Leftrightarrow F=25\ Kp\,.\frac{7{,}5\ m}{0{,}6\ m}=312{,}5\ Kp$$

28.- A. De las propiedades del producto vectorial

$$Area=1/2\,.\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=4i+2j-4k\,;$$

$$Area=1/2\,.\sqrt{4^2+2^2+4^2}=1/2\,.\sqrt{36}=3$$

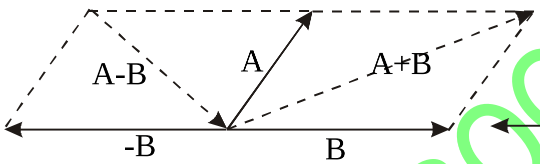
29.- A. El momento de un vector respecto de un punto se obtiene del producto vectorial:

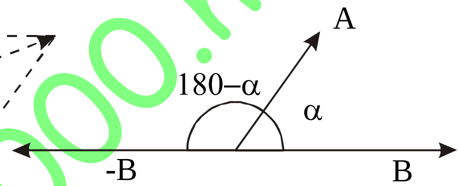
$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{a}=B\vec{A}\times\vec{a}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1-2 & -1+3 & -5-0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-i-3j-k$$

$$\vec{M}+\vec{a}=(-i-3j-k)+(0i+j-3k)=(-i-2j-4k)$$

$$\left|\vec{M}+\vec{a}\right|=\sqrt{1^2+2^2+4^2}=\sqrt{21}$$

30.- D Si los dos vectores forman un paralelogramo sus diagonales representan la suma y resta vectorial de los lados. Si las diagonales son iguales entonces el paralelogramo tiene sus lados perpendiculares (o es un cuadrado o un rectángulo).





Matemáticamente sería:

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right|=\left|\vec{A}-\vec{B}\right|\Leftrightarrow\left|\vec{A}+\vec{B}\right|^2=\left|\vec{A}-\vec{B}\right|^2$$

o lo que es lo mismo

$$\left|\vec{A}\right|^2+\left|\vec{B}\right|^2+2.\left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|.\cos\alpha=\left|\vec{A}\right|^2+\left|\vec{B}\right|^2+2.\left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|.\cos(180-\alpha)\;\Rightarrow$$

$$\cos\alpha=\cos(180-\alpha)$$

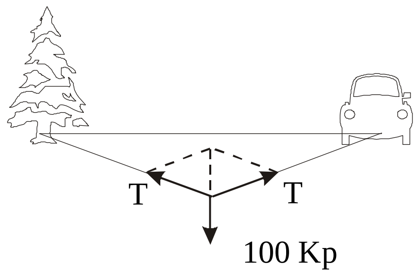
de donde se deduce que $\alpha = 90º$.

31.- C El módulo de la resultante entre dos vectores se puede calcular si se conocen los módulos y el ángulo que forman entre sí dichos vectores.

$$R=\sqrt{A+B+2.A.B.\cos\alpha}$$

$$100=\sqrt{T^2+T^2+2.T.T.\cos\alpha}$$

$$100^2=2T^2+2T^2.\cos\alpha$$



$$100^2=2T^2.(1+\cos\alpha)\;\Leftrightarrow T^2=\frac{T^2}{2.(1+\cos 160º)}$$

$$T=\sqrt{\frac{100^2\;Kp^2}{2.(1+\cos 160º)}}=287{,}9\;Kp$$

32.- A Para calcular la componente de un vector al proyectarlo sobre otro se tiene que multiplicar aquel por el versor de éste último. Si derivamos para obtener la velocidad:

$$v_x=2t \; ; \; v_y=-2 \; ; \; v_z=4t-1 \Rightarrow \vec{v} = (2t, -2, 4t-1)$$

Por otro lado el versor es

$$\hat{u} = \frac{(2,2,-1)}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = (2/3, 2/3, -1/3)$$

$$\vec{v} \cdot \hat{u} = (2t, -2, 4t-1) \cdot (2/3, 2/3, -1/3) = -1$$