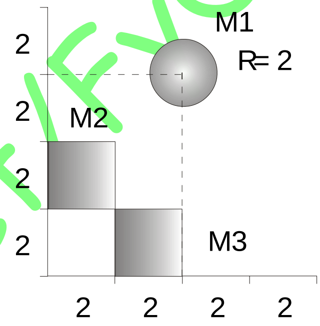
1.- B. La definición de choque frontal totalmente inelástico es aquel en el que los cuerpos que colisionan se acoplan y se mueven con la velocidad del centro de masas.

2.- D. La tercera ley de Newton dice que las fuerzas ejercidas entre cada pareja de partículas se anulan entre sí al ser de acción-reacción: $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. Entonces la suma de todas las fuerzas interiores es cero: $\sum F_{INT} = 0$. Para aplicar entonces la 2ª Ley de Newton sólo se tienen en cuenta las Fuerzas exteriores al sistema de partículas:

$$\sum \vec{F}_{EXT} .dt = d\vec{p}$$

3.- B.- La velocidad será la misma ya que en los choques elásticos se conserva la Energía cinética.

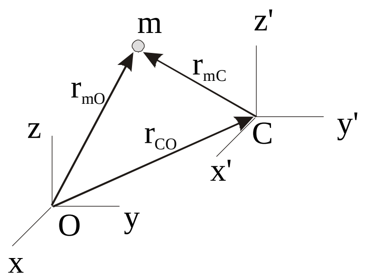


4.- C.

$$Y_G = \frac{\sum m_i .y_i}{\sum m_i} = \frac{\sigma.\sum S_i .y_i}{\sigma.\sum S_i} = \frac{2^2.1 + 2^2.3 + \pi.2^2.6}{2^2 + 2^2 + \pi.2^2} = 4{,}44$$

5.- B. La velocidad relativa al centro de masas es igual a la velocidad relativa a otro origen menos la que tenga el centro de masas con respecto a ese otro origen:

Sean OXYZ un sistema de referencia inercial, CX'Y'Z' el sistema de referencia del centro de masas y m la partícula a estudiar. Entre los vectores de posición se verifica que:



$$\vec{r}_{mO} = \vec{r}_{CO} + \vec{r}_{mC}$$

Al derivar respecto del tiempo, se cumple para las velocidades que:

$$\vec{v}_{mO} = \vec{v}_{CO} + \vec{v}_{mC}$$

$\vec{v}_{mO}$ representa la velocidad de la partícula m respecto al observador en O.

$\vec{v}_{mC}$ representa la velocidad de la partícula m respecto al centro de masas.

$\vec{v}_{CO}$ es la velocidad con que se mueve el centro de masas con respecto a O.

Entonces se despeja:

$$\vec{v}_{mC} = \vec{v}_{mO} - \vec{v}_{CO}$$

Para calcular esas velocidades derivamos los vectores deposición respecto del tiempo:

$$\vec{v}_{mO} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{mO}) = 3i + 2j + k \;\; ; \;\; \vec{v}_{CO} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{CO}) = i + 4j + 4k$$

Por último las restamos para calcular la velocidad relativa de la partícula respecto al centro de masas:

$$\vec{v}_{mC} = \vec{v}_{mO} - \vec{v}_{CO} = 2i - 2j - 3k \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{v}_{mC}| = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17}\ \frac{m}{s}$$

6.- D. Para un sistema constituido por n partículas, el momento angular total del sistema sólo puede ser alterado por la acción de momentos externos, permaneciendo constante en ausencia de los mismos.

7.- C. El vector posición del centro de masas viene definido por:

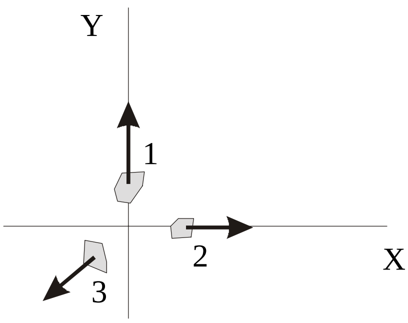
$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

sustituyendo los valores

$$\vec{r}_{cm} = \frac{(1.0 + 2.3 + 3.4)\vec{i} + (1.3 + 2.0 + 3.2)\vec{j} + (1.1 + 2.2{,}5 + 3.1)\vec{k}}{1+2+3} = 3\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k}\ \ m$$

8.- D. Efectivamente, el coeficiente de restitución es cero en los choques plásticos o totalmente inelásticos. Es uno en choques elásticos y está comprendido entre cero y uno para los choques inelásticos. Por otro lado en todos los choques se conserva el momento lineal y el cinético, ya que en ellos actúan fuerzas internas que se anulan dos a dos. Y ,por último, sólo en los choques elásticos se conserva la energía cinética.

9.- A. En una explosión sólo intervienen fuerzas internas, por lo tanto la cantidad del movimiento del sistema se conserva. Esto quiere decir que la cantidad de movimiento antes de la explosión (cero) tiene que ser igual a la cantidad de movimiento después de la misma:



$$0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 = 1\ .12\vec{j} + 2\ .8\vec{i} + m_3\vec{v}_3$$

al despejar la velocidad del tercer fragmento, se obtiene

$$\vec{v}_3 = \frac{-16\vec{i} - 12\vec{j}}{m_3}$$

como conocemos el módulo de la velocidad de este trozo, podemos decir que:

$$40\ m/s = \sqrt{\frac{(-16)^2}{m_3^2} + \frac{(-12)^2}{m_3^2}} = \frac{20}{m_3} kg\ .m/s$$

despejando m_3, se obtiene un valor de 0,5 kg; la masa de la roca es la suma de los tres fragmentos, es decir, 3,5 kg.

10.- B. El coeficiente de restitución, K, es la medida de la elasticidad de una colisión, y se define como el cociente entre la velocidad relativa de retroceso y la velocidad relativa de aproximación:

$$K = -\frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{2i} - v_{1i}}$$

de manera que si K = 0 el choque es perfectamente inelástico y si K = 1 el choque es elástico.

11.- B. El centro de masas se mueve como una partícula de masa

$$M = \sum m_i$$

sometida a la influencia de la fuerza externa resultante que actúa sobre el sistema.

12.- C. La mediana se define como la recta que une un vértice al punto medio del lado opuesto. El corte de las medianas da el baricentro o centro de gravedad del triángulo cuando éste tiene densidad uniforme.

13.- D. Para calcular la fuerza se necesita saber la aceleración que se obtiene derivando respecto del tiempo dos veces el vector de posición:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 8t.i + (4t+1).j + 4.k$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 8.i + 4.j$$

$$\vec{F} = M.\vec{a} = 6{,}5\ Kg.(8.i + 4.j)\frac{m}{s^2} \Leftrightarrow F = 6{,}5.\sqrt{8^2 + 4^2} = 58{,}14\ N$$

14.- D. Es correcta en el caso de un choque plástico o totalmente inelástico. En él, la velocidad de los cuerpos después del choque, es la misma que la del centro de masas. Así, después del choque no hay energía cinética en los cuerpos respecto al centro de masas ya que sus velocidades relativas a él son cero.

La A es falsa por lo dicho antes. La energía cinética respecto a un sistema ajeno al centro de masa no se tiene por qué perder.

La B no es correcta. En el choque elástico lo que es igual es la energía cinética total, antes y después del choque.

La C es totalmente absurda ya que el momento lineal total se define como el producto de la masa del sistema por la velocidad del centro de masas. Entonces si ésta última es cero aquél también lo será.

15.- B. Como se observa en el gráfico, la componente paralela a la banda de la mesa se mantiene; la que cambia es la componente perpendicular a ella:

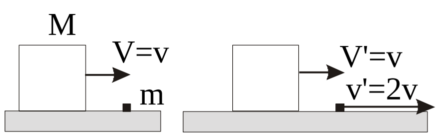
$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_o = (\vec{p}_{fy} + \vec{p}_{fx}) - (\vec{p}_{oy} + \vec{p}_{ox}) =$$

$$0{,}5\ Kg.1\ m/s\ .[(\text{sen}\ 30i + \cos 30\ j) - (-\text{sen}\ 30i + \cos 30\ j)] =$$

$$0{,}5\ Kg.1\ m/s\ .2.\text{sen}\ 30.i = 0{,}5.i.Kg.m/s$$

16.- C. En todo choque se conserva la cantidad de movimiento del sistema si la calculamos un instante antes y otro después del mismo. Esto es debido a la 2ª ley de Newton:

$$\sum \vec{F}.dt = d\vec{p}$$



Si el intervalo de tiempo es muy breve $dt \cong 0$ entonces $d\vec{p} \cong 0 \Leftrightarrow \vec{p} = cte$.

$$M.V = M.V' + m.v'$$

$$20000 \,.\, 10 = 20000 \,.\, V' + 0{,}01 \,.\, v'$$

Por otro lado el coeficiente de restitución "*e*" de un choque elástico vale la unidad:

$$e = 1 = \frac{v' - V'}{V - 0} \Leftrightarrow V = v' - V' \Leftrightarrow 10 = v' - V'$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas sale aproximadamente:

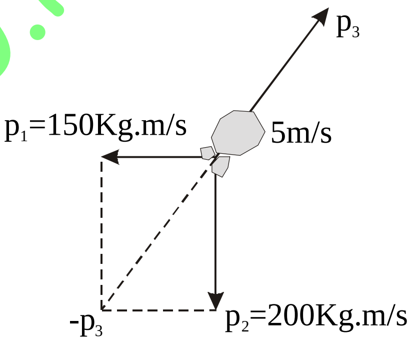
$$v' = 20\ m/s \quad V' = 10\ m/s.$$

Esto sucede siempre que uno de los objetos tiene mucha masa comparada con otro muy pequeño que inicialmente se encuentra parado.

17.- D. Se considera el centro de coordenadas en el centro de la barca. Entonces la persona de 80 Kg esta en $x = -2\ m$ y la de 60 Kg en $x = 2\ m$:

$$X_{CM} = \frac{\sum m_i . x_i}{\sum m_i} = \frac{80\ Kg\,.\,(-2)\ m + 400\ Kg\,.\,0\ m + 60\ Kg\,.\,(+2)\ m}{80\ Kg + 400\ Kg + 60\ Kg} = -\,0{,}074\ m$$

18.- A. Si aplicamos el principio de conservación del momento lineal: $\sum \vec{F}.dt = d\vec{p}$ y consideramos un instante antes y otro después de la explosión entonces $dt \cong 0$ y podemos suponer que $d\vec{p} = 0 \Leftrightarrow \vec{p} = cte.$ Si inicialmente la roca está en reposo su momento es cero y así debe seguir un instante después de la explosión. La suma de los vectores momento lineal entonces será cero. Como se observa del dibujo p_3 es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, entonces:



$$p_3 = \sqrt{150^2 + 200^2} = 250\ Kg.m/s \Rightarrow m_3 = \frac{p_3}{v_3} = \frac{250}{5}\ Kg = 50\ Kg$$

La masa total de la roca vale pues: 10+20+50=80 *Kg*

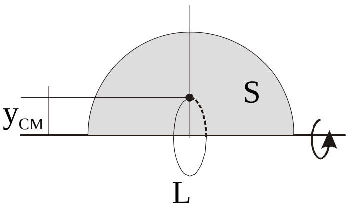
19.- C. Las respuestas A,B y D son incorrectas. Entendemos que la media aritmética ponderada de las posiciones supone multiplicar cada posición por la masa de la partícula. La definición de centro de masas es:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i . \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

Para que fuese correcta la respuesta B tendría que advertir que g fuese igual para todas las partículas. Esto se cumple en cuerpos de dimensiones pequeñas con respecto a la Tierra y entonces los vectores de la aceleración de la gravedad son paralelos e iguales en módulo para todas las partículas.

20.- A.

21.- C. Aplicando el Teorema de Guldin para figuras de revolución:



$$L\ .\ S = V$$

V: volumen de la esfera que se obtiene al girar el semicírculo en torno al eje *OX*.

S: superficie del semicírculo que se gira.

L: longitud de la curva de revolución que describe el centro de gravedad del semicírculo ($2.\pi.y_{CM}$).

$$2.\pi.y_{CM}\ .\ \frac{\pi.R^2}{2} = \frac{4}{3}.\pi\ .\ R^3 \iff y_{CM} = \frac{4.R}{3.\pi}$$

22.- C. La explosión surge de unas fuerzas interiores que por ser iguales dos a dos por el principio de acción reacción, se anulan entre ellas y no modifican la trayectoria del centro de masas. Las únicas fuerzas que determinan la trayectoria del centro de masas de un sistema son las exteriores: la del peso y la del rozamiento en este caso.

23.- D.

$$\sum \vec{F}_{EXT}.dt = d\vec{p}_{CM}$$

La A debería añadir que también puede ocurrir que haya fuerzas exteriores, pero su resultante sea nula.

En la B el momento angular de un sistema es igual a la suma del momento angular de su centro de masas (momento orbital) más la suma de los momentos de sus partículas relativos al centro de masas (momento de spin).

En la C lo correcto sería decir que si el momento resultante de las fuerzas exteriores es cero, se conserva el momento angular.

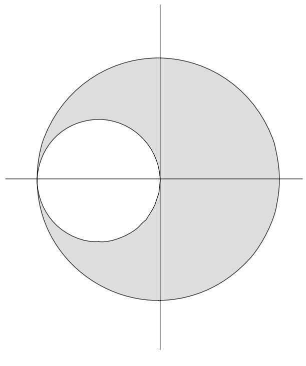
24.- D. Parte de la energía mecánica se transforma en calor y deformación si el choque no es totalmente elástico.

25.- B. La segunda es ley de Newton: F=M.a , y parea calcular a derivamos dos veces la ecuación del vector de posición con respecto al tiempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 8t.\hat{i} + (4t-1).\hat{j} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 8.\hat{i} + 4.\hat{j} \Rightarrow \vec{F} = M.\vec{a} = 40.\hat{i} + 20.\hat{j}$$

26.- A. La segunda derivada del vector de posición respecto del tiempo da una aceleración del centro de masas constante de valor ($1i$ + $10j$) lo que hace que la fuerza sea también constante.

27.- C. Por simetría Y_{CM}=0 y para el eje *X* se obtiene:



$$X_{CM} = \frac{\Sigma m_i X_i}{\Sigma m_i} = \frac{\Sigma\sigma.S_i.X_i}{\Sigma\sigma.S_i} = \frac{\pi R^2.0 - \pi\left(R/2\right)^2.\left(-R/2\right)}{\pi R^2 - \pi\left(R/2\right)^2} = \frac{R^3/8}{3/4.R^2} = R/6\ .$$

Como se observa en esta última fórmula se considera el hueco con densidad negativa.

28.- D. El coeficiente de restitución de un choque elevado al cuadrado es el cociente que hay entre la energía cinética final y la inicial:

$$e^2 = \frac{E_{cf}}{E_{co}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1/4$$

Si no hay pérdida de energía por rozamiento con el aire la energía cinética y la energía potencial en la caída libre coinciden, luego entonces:

$$\frac{E_{cf}}{E_{co}} = 1/4 = \frac{E_{pf}}{E_{po}} = \frac{mgh_f}{mgh_o} = \frac{h_f}{h_o}$$

en el primer bote: $h_1/64 = ¼ \Rightarrow h_1=16\ m$

en el segundo bote: $h_2/16 = ¼ \Rightarrow h_2=4\ m$

y en el tercero $h_3/4 = ¼ \Rightarrow h_3=1\ m$

29.- D.La explosión de la bomba surge de fuerzas interiores a ella que siguen la 3ª Ley de Newton y se anulan dos a dos. Entonces estas fuerzas no alteran la trayectoria del centro de masas del sistema. La posición de éste la situamos en el origen de coordenadas con lo que:

$$0 = \frac{\sum m_i . x_i}{\sum m_i} = \frac{15\ Kg.25\ m + 5\ Kg.x}{20\ Kg} \Leftrightarrow x = -75\ m$$

Si hemos tomado 25 m al N como positivo, -75 m significa al Sur.

30.- B. El caso más evidente de falsedad de esta respuesta es el de un anillo circular hueco que posee su centro de masas en el centro (donde no hay masa).

31.- B. Sobre el sistema moto-camión la suma de Fuerzas exteriores es cero ya que ambos mantienen su velocidad. Las fuerzas que actúen entre ambos son de acción-reacción y se anulan, entonces podemos aplicar el principio de conservación de la cantidad de movimiento o momento lineal al sistema moto-camión:

$$\sum F_{EXT} .dt = dp = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = cte$$

$$p^o = p^f \quad \Leftrightarrow \quad 500\ kg.120\ {km}/{h} + 2500\ kg.60\ {km}/{h} = (500 + 2500)\ kg.v$$

Se despeja   v=70 km/h

32.- B.

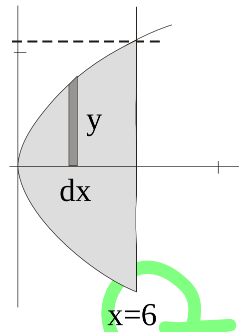
La A debería decir el centro de masas se mueve como si todas las fuerzas exteriores actuasen sobre una masa puntual situada en el centro de masas y que fuese igual a la suma de todas las masas del sistema.

La C sería correcta si dijese que el momento lineal es la suma vectorial de todos los momentos lineales de las partículas.

La D es imposible ya que en el aire, en ausencia de rozamiento, la única fuerza que existe es la del peso y ella determina la trayectoria del saltador. Todas las fuerzas que haga una parte del cuerpo del saltador contra el resto de su cuerpo, serán fuerzas interiores que se anularán dos a dos y por tanto no modificarán la trayectoria del centro de masas del mismo.

33.- B. La ecuación $y^2=5.x$ es una parábola de vértice en origen de coordenadas y la ecuación $x=6$ es una recta vertical de abscisa 6.

Dada la simetría de la figura respecto del eje *X*, la coordenada *Y* del centro de masas es 0.



Para calcular la *X* del centro de masas lo haremos para la mitad superior de la figura, ya que es la misma que la de la mitad inferior, así como la de la figura entera. Los trozos elementales de área tienen de altura *Y* y de base *dx*. Así:

$$X_{CM}=\frac{\int_0^6 x.dS}{\int_0^6 dS}=\frac{\int_0^6 x.y.dx}{\int_0^6 y.dx}=\frac{\int_0^6 x.\sqrt{5}.\sqrt{x}.dx}{\int_0^6 \sqrt{5}.\sqrt{x}.dx}=$$

$$X_{CM}=\frac{\int_0^6 x.\sqrt{x}.dx}{\int_0^6 .\sqrt{x}.dx}=\frac{\left[\frac{x^{5/2}}{5/2}\right]_0^6}{\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^6}=\frac{3}{5}.\frac{6^{5/2}}{6^{3/2}}=\frac{3}{5}.6=3{,}6$$

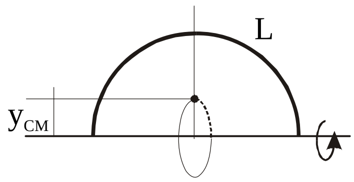
34.- D. Si el caudal que cae por m^2 lo multiplicamos por la superficie tenemos el caudal. Si lo multiplicamos por el tiempo nos da el volumen. Y si por último lo multiplicamos por la densidad tendremos la masa caída:

$$\frac{10^{-2}\ l}{60\ s\ .\ m^2}.6\ m^2.t\ (s).\frac{1\ Kg}{l}=6.t.10^{-3}\ (Kg)=6.t\ (g)$$

35.- C. Si la semicircunferencia girase en torno al eje X originaría una esfera hueca. Si a esto le aplicamos el teorema de Guldin:

$$S = L\ .\ 2\pi y_G$$

S superficie de la figura de revolución (en este caso de la esfera hueca $S = 4\ \pi R^2$).



L **longitud de la curva que se revoluciona en torno al eje *X* (aquí la de la semicircunferencia $L = \pi.R$).**

$2\pi y_G$ Representa la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad al realizar un giro completo alrededor del eje *X*.

que aplicado en este caso sería:

$$4\pi R^2 = \pi R\ .\ 2\pi y_G \quad\Rightarrow\quad y_G = 2\ R/\pi.$$

En esta figura por simetría $x_G = 0$.

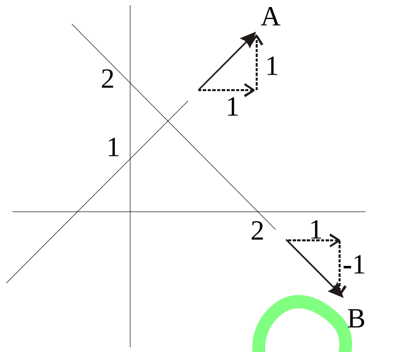
36.- B. La pendiente de la recta A es 1 luego el versor de su velocidad es

$$\hat{v}_A = (\frac{1,1}{\sqrt{2}})$$

análogamente en B la pendiente es –1 luego el versor de su velocidad

$$\hat{v}_B = (\frac{-1,1}{\sqrt{2}}) .$$

Al multiplicar estos versores por la celeridad nos da el vector velocidad:



$$\vec{v}_A = (\frac{3,3}{\sqrt{2}}) \;\; \vec{v}_B = (\frac{-2,5,2,5}{\sqrt{2}})$$

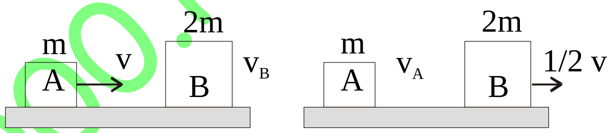
y al multiplicar éste por la masa da el momento lineal:

$$\vec{p}_A = (\frac{4,5\,,\,4,5}{\sqrt{2}}) \;\; \vec{p}_B = (\frac{-5\,,\,5}{\sqrt{2}})$$

La suma de ambos es:

$$\vec{p}_T = \vec{p}_A + \vec{p}_B = \left(\frac{-0,5\,,\,9,5}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-0,5\,,\,9,5) = \sqrt{2}(-0,25\,,\,4,75)$$

37.- B. En todo choque se conserva la cantidad de movimiento o momento lineal:



$$p_A^o + p_B^o = p_A^f + p_B^f$$

$$m.v + 2\,m\,v_B = m\,v_A + 2\,m\,½\,v \;\;\Rightarrow\;\; 2\,v_B = v_A$$

Por otra parte si el choque es elástico su coeficiente de restitución es la unidad:

$$k = 1 = \frac{v_A - v/2}{v_B - v}$$

Ecuación que junto a la anterior da

$$v_B = -\,v/2$$