1.- D. El alcance máximo es en un tiro parabólico sin rozamiento:

$$x_{MAX} = \frac{v_0^2 \,.\, \text{sen}\, 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \,.\, 2 \,.\, \text{sen}\, \alpha \,.\, \cos \alpha}{g}$$

Para ángulos complementarios x_{MAX} es igual ya que:

sen α = *cos* (90-α) y también *cos* α = *sen* (90-α)

2.- A. La aceleración normal, se obtiene como:

$$a_N = a \,.\, \text{sen}\, \alpha = a \,.\, \frac{|\vec{a} \times \vec{v}|}{a.v} \quad \text{ya que } |\vec{a} \times \vec{v}| = a.v.\text{sen}\, \alpha$$

También se tiene que:

$$a_N = \frac{v^2}{R}$$

Combinando ambas expresiones se despeja *R*:

$$R = \frac{v^3}{|\vec{a} \times \vec{v}|}$$

De derivar la velocidad:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(3.i - 2t.j) = 0.i - 2.j$$

Sustituyendo en la expresión de *R*:

$$R = \frac{\left(\sqrt{3^2 + (-2t)^2}\right)^3}{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -2t & 0 \end{matrix} \right\|} = \frac{(3^2 + (-2t)^2)^{3/2}}{|-6.k|} = \frac{(3^2 + (-2t)^2)^{3/2}}{6}$$

Para *t*=2 se sustituye y queda:

$$R = \frac{(3^2 + (-2.2)^2)^{3/2}}{6} = \frac{(9+16)^{3/2}}{6} = \frac{5^3}{6} = 20{,}8\, m$$

3.- B. Si el módulo de la velocidad es constante no hay aceleración tangencial. Todo movimiento cuya trayectoria no sea recta tiene aceleración normal.

4.- C.

$$v = ds/dt = d/dt\,(t^2+t+1) = (2.t + 1)\ m/s$$

$$a_T = dv/dt = d/dt\,(2.t+1) = 2\ m/s^2.$$

$$\alpha = a_T/R = 2/3\ rad/s^2.$$

5.- A. Para un movimiento uniformemente acelerado se verifica:

$$\theta = \theta_O + \omega_O.t + \tfrac{1}{2}.\alpha.t^2$$

si θ_O=0 y ω_O=0 entonces $\alpha = 2\theta / t^2$

$$\alpha = \frac{2 \,.\, 3600\ rev. \frac{2\pi\ rad}{1\ rev}}{(2\ min \,.\, 60\ s/min)^2} = \pi\ rad/s^2$$

6.- D. La velocidad angular ω es un vector axial que se define a partir del producto vectorial $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Para calcular el módulo de la velocidad angular se divide el ángulo recorrido por la aguja entre el tiempo empleado:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1\,rev}{1\,h} . \frac{2\pi\,rad}{1\,rev} . \frac{1\,h}{3600\,s} = \frac{\pi\,rad}{1800\,s}$$

7.- B. Las ecuaciones de la posición son:

Eje X $\qquad x = 2\,t - 3$

Eje Y $\qquad y = (\,2\,t - 3)^2 - 9$

Las ecuaciones de la velocidad son entonces:

$$V_x = 2 \;\; ; \;\; V_y = dy/dt = 2.(2\,t - 3).2 = 8\,t - 12$$

Para un tiempo t=2 se obtiene

$$V_x = 2 \quad V_y = 4$$

El vector velocidad (2,4) es tangente a la trayectoria y el vector aceleración normal debe ser perpendicular a ella. Un vector así debe tener componentes proporcionales a (-4,2) que resultan de cambiar el orden de las componentes anteriores y una de ellas de signo. Esta condición sólo la cumple la respuesta B.

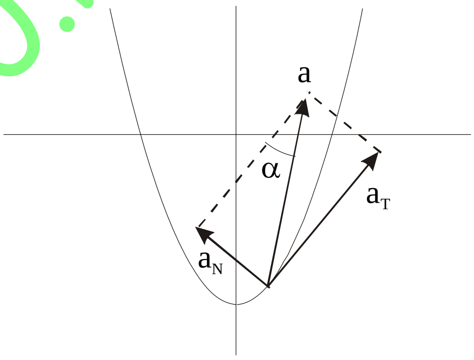
Para resolver bien la cuestión tenemos que demostrar que el vector perpendicular a la velocidad y en la dirección del centro de curvatura es (-4,2) y no (4,-2). Para ello dibujemos la trayectoria

$$y = x^2 - 9$$

que corresponde a una parábola cuyo vértice se encuentra en (0,-9)

En t = 2 el móvil se halla en

$$x = 1 \;\; ; \;\; y = -8$$



En la gráfica adjunta se ha representado esa situación. El vector $\vec{a}_T$ tiene la misma dirección que el vector $\vec{v}$ y el vector $\vec{a}_N$ está dirigido hacia el centro de curvatura de la trayectoria. Como se puede observar del dibujo las componentes de la aceleración normal no pueden ser proporcionales a (4,-2), sino en todo caso a (-4,2).

Para calcular el valor de la aceleración normal, se deduce del gráfico:

$$\left|\vec{a} \times \vec{v}\right| = a.v.\mathrm{sen}\,\alpha \quad ; \quad a_N = a\,.\,\mathrm{sen}\,\alpha = a\,.\,\frac{\left|\vec{a} \times \vec{v}\right|}{a.v}$$

La aceleración se obtiene de derivar la velocidad:

$$a_X = \frac{dv_X}{dt} = \frac{d}{dt}(2) = 0 \quad ; \quad a_Y = \frac{dv_Y}{dt} = \frac{d}{dt}(8t - 12) = 8$$

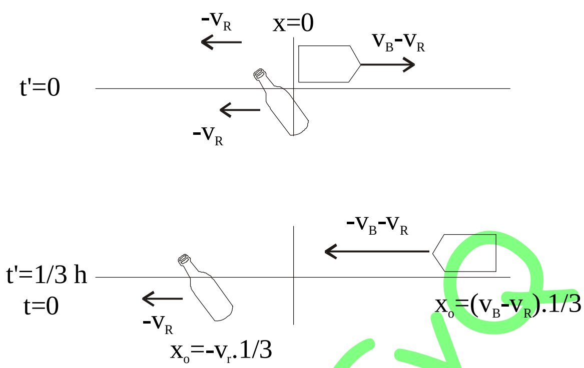
Con estos valores y los calculados antes de v se obtiene a_N:

$$a_N = \frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{16}{\sqrt{20}}$$

Para calcular el vector $\vec{a}_N$ se multiplica su módulo anterior por el versor obtenido a partir del vector (-4,2), que ya se sabe que posee la dirección y sentido de $\vec{a}_N$:

$$\vec{a}_N = a_N.\hat{a}_N = \frac{16}{\sqrt{20}}.\frac{(-4i+2j)}{\sqrt{4^2+2^2}} = \frac{8}{5}.(-2i+j)$$

8.- B. Los movimientos de la barca como el de la botella son rectilíneos y uniformes.



En el gráfico adjunto se observa que el criterio de signos es positivo a la derecha, la corriente del río va hacia la izquierda y el origen de coordenadas está en el puente. Las unidades empleadas son millas y horas. Para escribir sus ecuaciones a partir de los veinte minutos, momento en el que pondremos el reloj con $t = 0$ cuando los dos viajan en el mismo sentido, tenemos que calcular qué posición que ocupan en ese momento.

La botella viaja con la velocidad de la corriente y estará en

$$x_o = -v_R.\ 1/3$$

La barca viaja con velocidad $(v_B - v_R)$ y estará en

$$x_o = (v_B - v_R)\ .\ 1/3$$

A partir de los veinte minutos (1/3 h) la botella sigue con velocidad $-v_R$ y ahora la barca viaja a $(-v_R - v_B)$, luego las ecuaciones $x=x_o+v.t$ son:

Botella : $x_1 = -v_R.\ 1/3 - v_R\ .\ t$

Barca: $x_2 = (v_B - v_R)\ .\ 1/3 + (-v_R - v_B)\ .\ t$

Igualando ambas expresiones se calcula el tiempo del encuentro:

$$-v_R.\ 1/3 - v_R\ .\ t = (v_B - v_R)\ .\ 1/3 + (-v_R - v_B)\ .\ t$$

$$t = 1/3\ h$$

Si sustituimos ahora en la ecuación de la botella este tiempo y sabiendo del enunciado que x_1=1 *milla* obtenemos la velocidad de la corriente :

$-1 = -v_R.\ 1/3 - v_R\ .\ 1/3$; $v_R = 3/2 = 1{,}5$ *millas/h*

9.- B. El movimiento del objeto es uniformemente acelerado. Si consideramos positivo el sentido ascendente:

$y_o = 0\ m$ $v_o = +100\ m/s$ $a_Y = g = -10\ m/s^2$.

La ecuación del objeto es : $y = 100\ .\ t - 5\ .\ t^2$. Sustituyendo $y=h$ sale:

$$t_2 = \frac{100+\sqrt{100^2-20.h}}{10} \quad ; \quad t_1 = \frac{100-\sqrt{100^2-20.h}}{10}$$

Puesto que $t_2 - t_1 = 10$, restando ambas expresiones queda:

$$100 = 2.\sqrt{100^2-20.h} \quad ; \quad 50^2 = 100^2 - 20.h \quad ; \quad h = 375\ m$$

10.- D. La aceleración respecto de unos ejes no inerciales (ascensor) es igual a la que hay respecto de otros inerciales (el suelo en primera aproximación) menos la de arrastre, o sea la que posee el sistema no inercial respecto del inercial (en este caso la del ascensor respecto del suelo). Si se toma criterio positivo hacia abajo:

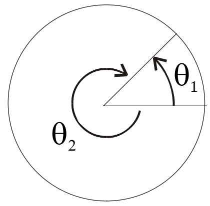
$$a_{SNI} = a_{SI} - a_{ARRASTRE} = g - (-a) = g + a$$

11.- C. Derivando las ecuaciones de la posición se obtiene la velocidad:

$V_x = dx/dt = 9t^2 + 2$ $V_x(3) = 9.3^2 + 2 = 83$

$$V_y = dy/dt = 12\,t + 1 \qquad V_y(3) = 12.3 + 1 = 37$$
$$\vec{v} = 83\,\hat{i} + 37\,\hat{j}$$

12.-A. Cuando se encuentren los ángulos recorridos por los dos sumarán $2\pi\,rad$:



$$2\,.\,\pi = \theta_1 + \theta_2 = \omega_1\,.\,t + \omega_2\,.\,t$$
$$2\,.\,\pi\ rad = \frac{1\,rev}{2\,h}.\frac{2\pi\ rad}{1\,rev}.\frac{1\,h}{60\,min}.t + \frac{6^\circ}{1\,min}.\frac{2\pi\ rad}{360^\circ}.t$$

Simplificando:

$$1 = t/120 + t/60 \quad ; \quad 120 = t + 3t \quad ; \quad t = 40\ min$$

13.- A. El alcance máximo en un tiro parabólico se consigue para un ángulo de lanzamiento de 45º. Así si aplicamos la fórmula: $X_{MAX} = v_o^2\ sen\ 2\alpha / g$ y de ella despejamos v_o:

$$v_o = \sqrt{\frac{g.X_{MAX}}{\text{sen } 2\alpha}} = \sqrt{\frac{10.100000}{\text{sen } 90}} = 1000\ m/s$$

Con esta velocidad inicial en un tiro vertical el tiempo de ascenso sería:

$$v_f = v_o - g.t = 0 = 1000 - 10.t \ \Rightarrow\ t = 100\ s$$

Y con ello se alcanzaría una altura de:

$$H = v_o.t - \tfrac{1}{2}.g.t^2 = 1000.100 - \tfrac{1}{2}.10.10000 = 50000\ m = 50\ Km$$

14.- A. Si el objeto pasa durante 1 *s* por la ventana emplea por la simetría del movimiento de sube-baja 0,5 *s* en ascender y otros 0,5 *s* en descender. Si ponemos un origen de coordenadas en la parte de abajo de la ventana entonces la ecuación del objeto cuando sube es:

$$1{,}5 = v_o.0{,}5 - 4{,}9\,.\,0{,}5^2 \Rightarrow v_o = \frac{1{,}5 + 4{,}9\,.\,0{,}5^2}{0{,}5} = 5{,}45\ m/s$$

Con esta velocidad inicial del objeto el tiempo que emplea en la subida hasta el punto más alto donde v=0 se calcula como:

$$v = v_o - g.t = 0 = 5{,}45 - 9{,}8\,.\,t \quad \Rightarrow\ t = 0{,}556\ s$$

Conocido ese tiempo podemos saber cuál será la altura máxima (medida desde el pie de la ventana) del objeto:

$$H = v_o.t - 1/2\ g.t^2 = 5{,}45\,.\,0{,}556 - 1/2\,.\,9{,}8\,.\,(0{,}556)^2 = 1{,}515\ m$$

Para llegar al resultado restamos a esta altura la de la ventana y da :

$$\Delta H = 1{,}515 - 1{,}5 = 0{,}015\ m = 1{,}5\ cm$$

15.- B. El enunciado está incompleto ya que falta advertir, para obtener la opción B, que Supermán realiza dos movimientos uniformemente acelerados. El primero la mitad del camino en la mitad del tiempo de caída del alumno y el segundo de frenado después. Si suponemos esto, entonces el tiempo de caída del alumno es:

$$300 = ½\,.\,9{,}8\,.\,t^2 \ ;\ t = 2{,}825\ s$$

Con este dato la aceleración de Supermán es:

$$a = \frac{2.\left(h/2\right)}{\left(t/2\right)^2} = \frac{2.150}{\left(2{,}825/2\right)^2} = 150{,}4\ m/s^2$$

16.- A. Este problema es de dos móviles con movimiento rectilíneo y uniforme que siguen la ecuación

$$x=x_o+v.t.$$

Hay que escoger un sistema de coordenadas con un criterio de signos (positivo hacia la derecha) y un origen que es el del encuentro inicial entre la lancha y el bote.

En $t = 0$

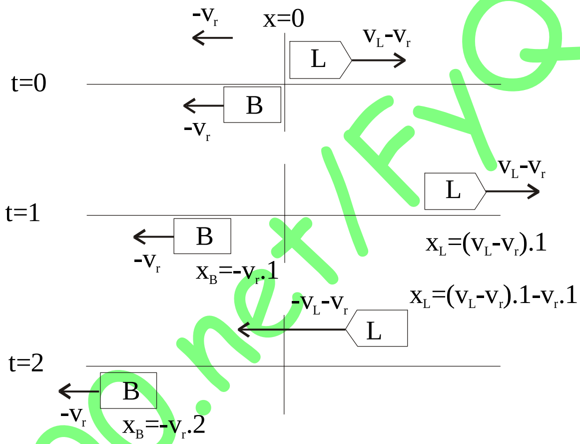
$x_B = 0 \qquad x_L = 0$

En $t = 1$ la balsa se mueve con la velocidad del río y la lancha con la suya menos la del río. Las coordenadas son:

$x_B=-v_r.1 \qquad x_L=(v_L-v_r).1.$

Entre $t = 1$ y $t = 2$ los dos objetos son arrastrados $-vr.1$. En $t=2$ la posición es la de $t=1$ habiéndole sumado $-vr.1$:

$x_B =-v_r.2 \qquad x_L= (v_L-v_r).1 - v_r.1$



En este momento ponemos el tiempo a cero y aplicamos la ecuación $x=x_o+v.t$:

$$x_l=[(v_l-v_r).1-v_r.1]+(-v_l-v_r).t \qquad x_b=-v_r.2-v_r.t$$

Si igualamos queda :

$$-2.v_r - v_r\ .\ t = v_L - v_r - v_r - v_L\ .\ t - v_r\ .\ t \quad\Rightarrow\quad t = 1\ h.$$

Si se sustituye este tiempo en la ecuación de la balsa sabiendo además, que el encuentro es en $x_B= 3\ Km$, se obtiene:

$$3 = -2.v_r - v_r.1 \quad\Rightarrow\quad v_r = 1\ Km/h.$$

17.- D. Igual que antes los movimientos en el eje X siguen ecuaciones del tipo $x=x_o+v.t.$

Las posiciones horizontales de la pelota x_P y del jugador x_J:

$x_P=20.cos\ 45\ .\ t \qquad\qquad x_J = 50 - v.t$

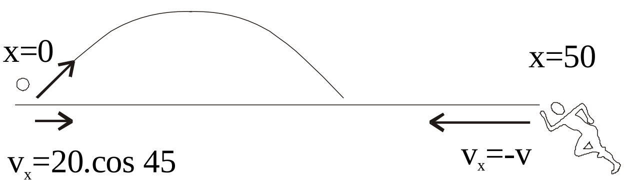
igualando en el encuentro queda:

$$20.\sqrt{2}/2\ .t = 50 - vt\ ; t = \frac{50}{10\sqrt{2} + v}$$

Por otro lado el movimiento vertical de la pelota es uniformemente acelerado y de ecuación:

$y_p= 20.sen\ 45\ .\ t - 5\ t^2$

Como la altura inicial y final de la pelota es $y = 0$ para obtener el tiempo se sustituye este valor en la ecuación anterior y queda:



$$0 = 20.\sqrt{2}/2\ .t - 5.t^2\ \ ;\ 0 = \left(10.\sqrt{2} - 5.t\right).t\ \ ;\ \ t = 2\sqrt{2}\ s$$

Si se sustituye este tiempo en el conseguido en la ecuación del eje X queda:

$$2\sqrt{2} = \frac{50}{10\sqrt{2}+v} \Leftrightarrow v = 2{,}5\sqrt{2}\,\frac{m}{s}$$

18.- D. Supuesto un movimiento uniformemente acelerado se verifica:

$$\Delta\theta = \omega_o.t + 1/2.\alpha.t^2 = 60\,{}^{rev}\!/_{min}.{}^{1\,min}\!/_{60\,s}.5\,s + 1/2\,\frac{6\,{}^{rev}\!/_{s} - 1\,{}^{rev}\!/_{s}}{5\,s}.(5\,s)^2 = 17{,}5\,rev$$

19.- A. Para calcular la componente de un vector al proyectarlo sobre otro se tiene que multiplicar aquel por el versor de éste último. Si derivamos para obtener la velocidad:

$v_x=2t$; $v_y=-2$; $v_z=4t-1 \Rightarrow \vec{v} = (2t, -2, 4t-1)$

Por otro lado el versor es

$$\hat{u} = \frac{(2,2,-1)}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = (2/3, 2/3, -1/3)$$

$$\vec{v}\,.\,\hat{u} = (2t,-2,4t-1).(2/3,2/3,-1/3) = -1$$

20.- D. Un movimiento uniformemente acelerado cumple $V_f^2=V_o^2+2a\Delta e$, entonces $V_o^2 = V_f^2-2a\Delta e = 0 - 2.(-16).50 = 1600$; $V_o=40\ m/s = 40\ .3{,}6\ Km/h = 144\ Km/h$

21.- C. Se trata de movimientos uniformes de ecuación $e=v.t$ pero en el de ida (por ser el más rápido) se suman las velocidades del barco y de la corriente y en el de vuelta se restan:

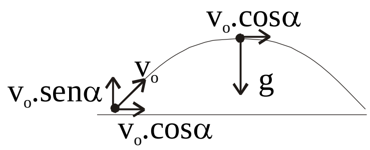
En la ida: $75 = (V_b+V_c).3$ $\quad 25 = (V_b+V_c)$

En la vuelta $75 = (V_b-V_c).5$ $\quad 15 = (V_b-V_c)$

La solución de este sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas es de:

$V_b= 20\ Km/h \qquad V_c= 5\ Km/h.$

22.- C. El radio de curvatura de un movimiento parabólico es mínimo en su vértice. Allí sólo hay aceleración normal ya que la gravedad es perpendicular a la tangente a la parábola en ese punto, y además la velocidad es sólo la componente horizontal de la inicial.



$$a_n=g \Rightarrow \frac{v^2}{R} = g = \frac{(v_o\cos\alpha)^2}{R}$$

$$R = \frac{(v_o\cos\alpha)^2}{g} = \frac{\left(180\,\frac{m}{s}.\cos 60\right)^2}{10\,\frac{m}{s^2}} = 810\,m$$

23.- C. La trayectoria del movimiento es la recta de ecuación $y=1$ $z=1$ que se deduce de la del vector de posición. Al ser así la aceleración normal vale cero como corresponde a todos los movimientos rectilíneos.

24.- C. Todo movimiento rectilíneo tiene aceleración normal o centrípeta cero, ya que ésta es responsable del cambio de dirección de la velocidad. En el movimiento rectilíneo la dirección no cambia.

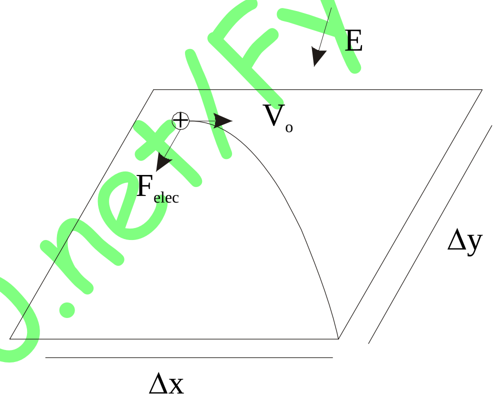
Si este movimiento es uniforme, también será la aceleración tangencial cero. Si es acelerado, entonces sí habrá aceleración tangencial.

25.- C. La velocidad relativa del segundo tren respecto del primero es de:

$$v_{21} = v_{2o} - v_{o1} = 40 - (-80) = 120\,\frac{Km}{h}$$

$$x = v\,.\,t = 120\,\frac{Km}{h}.\frac{1000\ m}{1\ Km}.\frac{1\ h}{3600\ s}.3\ s = 100\ m$$

26.- D. El movimiento que realiza la carga es parabólico y está compuesto por uno que es uniforme en el eje *X*, y otro que es acelerado en el eje *Y*, dado que existe una fuerza eléctrica en él.



En el eje *X* el tiempo que tarda en cruzar esa zona es:

$\Delta x = \Delta x / v_o = 0{,}20\ m\ /\ 0{,}2\ m/s = 1\ s$

En el eje *Y* existe una aceleración:

$Felec = m.a_y\ \ ;\ \ q.E = m.a_y$

$$a_y = \frac{q.E}{m} = \frac{10^{-5}.40}{5.10^{-3}} = 8.10^{-2}\ m/s^2$$

$$\Delta y = v_{oy}.t + \tfrac{1}{2}.a_y.t^2 = \tfrac{1}{2}.8.10^{-2}.1^2 = 4.10^{-2}\ m = 4\ cm$$