1.- C. Es el denominado principio de superposición de fuerzas eléctricas o gravitatorias.

2.- A. La B es incorrecta ya que en el campo eléctrico pueden aparecer fuerzas repulsivas o atractivas.

La D es falsa ya que se define la intensidad de campo como el cociente entre la fuerza y la masa o carga sobre la que actúa. La definición es más correcta si se dice que el cociente es en el límite en que la carga o masa vale cero.

3.- C. Las leyes de Newton y de Coulomb aplicadas en este caso dan un valor mucho más elevado para la electrostática:

$$F_{GRAV} = \frac{G.m.m}{d^2} = \frac{6{,}67.10^{-11}\ N.m^2/Kg^2 .(1{,}66.10^{-27}\ Kg)^2}{(1\ m)^2} = 1{,}84.10^{-64}\ N$$

$$F_{ELEC} = \frac{K.q.q}{d^2} = \frac{9.10^9\ N.m^2/C^2 .(1{,}6.10^{-19}\ C)^2}{(1\ m)^2} = 2{,}30.10^{-28}\ N$$

4.- A. Si para explicarlo pensamos en el escalar potencial, creado por una masa puntual, las superficies equipotenciales del campo escalar son esferas concéntricas con la masa. El gradiente del potencial representa un vector en la dirección radial de esas esferas que es aquella en la que la variación del potencial es máxima para un desplazamiento dado. La dirección en la que la variación del potencial sería cero sería la tangencial a esas esferas equipotenciales. La expresión matemática para esto es:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{dV}{dr}.\hat{r}$$

En ella el signo menos indica el sentido del vector campo. Sería hacia potenciales decrecientes. O sea acercándose hacia la masa creadora del campo.

5.- C. Para definir la energía potencial en un punto, debemos conocer la masa, su situación ($\vec{r}$), el valor del campo y también el valor absoluto de la energía potencial (U) en un punto de referencia ($\vec{r}_o$).Normalmente la U de esta punto de referencia suele tomarse como cero. Debemos calcular la circulación del la fuerza del campo con el signo cambiado desde el punto de referencia hasta el punto en cuestión y ello nos dará la variación de energía.

$$\Delta U = U_r - U_o = \int_{r_o}^{r} -m.\vec{E}.d\vec{r}$$

El valor de la energía potencial en un punto quedará como:

$$U_r = U_o + \int_{r_o}^{r} -m.\vec{E}.d\vec{r}$$

6.- D. Aunque debiera decir " la velocidad angular del satélite es ...". Un satélite alrededor de la Tierra que tenga de período un día y una órbita sobre el Ecuador, aparece estacionario respecto a la Tierra. A esta órbita se le denomina geosíncrona.

7.- B. El apartado A se descarta porque el campo eléctrico depende del medio donde se coloque la carga, no ocurre lo mismo con el campo gravitatorio que es independiente del medio donde se sitúe la masa que genera el campo. Aplicando la ley de Coulomb, tendremos que descartar el apartado C. Tanto el campo eléctrico como el gravitatorio son campos centrales, por lo tanto admiten energía potencial asociada.

8.- A. Las fuerzas centrales, no poseen momento respecto del punto al que están dirigidas en todo momento, ya que forman un ángulo de 180º con el vector de posición. Entonces se conserva el momento cinético o angular:

$$\sum \vec{M} = \frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{J} = cte.$$

$$m.v_1.R_1 = m.v_2.R_2 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = \frac{v_2.R_2}{R_1} = \frac{(400+6370)}{(5240+6370)}.18820\frac{Km}{h} = 10974\frac{Km}{h}$$

9.- C. El vector intensidad de campo es el gradiente del potencial con el signo cambiado.

La A no sirve, ya que una partícula conserva su energía potencial en un campo conservativo, sólo cuando llega a la misma situación de la que partió. Nótese que la energía potencial depende de la posición.

En la C, se dice que la fuerza de rozamiento es conservativa y eso es falso.

En la D, habría que afirmar que los campos de fuerzas centrales (como el que crean masas o cargas puntuales) son conservativos.

10.- C. La fuerza de rozamiento no es una fuerza conservativa.

11.- A. Sea M la masa del planeta y m la masa del satélite. La única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza que ejerce el planeta sobre el satélite, cuyo valor es

$$F = k\frac{M\,.\,m}{r^2}$$

siendo r la distancia entre el satélite y el planeta. Al describir una órbita circular, su movimiento es el correspondiente a un movimiento circular y uniforme (ley de Kepler), y en consecuencia, la aceleración del satélite es aceleración normal. Aplicando la segunda ley de Newton al satélite, se obtiene:

$$k\frac{M\,.\,m}{r^2} = m\,.\,a_n \quad \Rightarrow \quad k\frac{M\,.\,m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

por otro lado, el módulo de la velocidad del satélite es la distancia recorrida (2πr) entre el tiempo que tarda en dar una vuelta (periodo); si sustituimos se obtiene:

$$k\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m}\frac{\left(\frac{2\pi r}{P}\right)^2}{r} \Rightarrow k\frac{M}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{P^2} \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 r^3}{kP^2}$$

12.- C. La dirección del campo es tangente a la línea de campo.

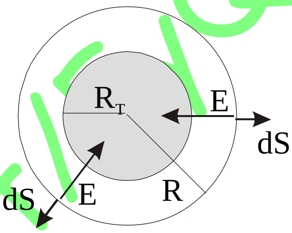
13.- B. La fuerza centrípeta que produce el movimiento circular uniforme del satélite es de naturaleza gravitatoria:

$$F_{cp} = F_G \iff m_{sat}.\omega^2.R = \frac{G.M_M.m_{sat}}{R^2} \iff \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{G.M_M}{R^3}$$

$$M_M = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.\frac{R^3}{G} = \left(\frac{2\pi}{460\,min.\,{}^{60\,s}\!/_{1\,min}}\right)^2.\frac{(9{,}4.10^6\ m)^3}{6{,}67.10^{-11}\ N.m^2/Kg^2} = 6{,}45.10^{23}\ Kg$$

14.- B. Para calcular el campo gravitatorio terrestre se emplea la Ley de Gauss para el flujo gravitatorio:

$$\phi_{GRAVIT} = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \oint_S E.\cos\alpha\,.\,dS = -4.\pi.G.M_{INT}$$



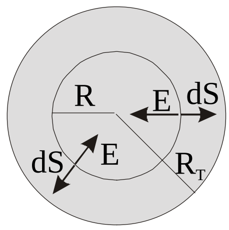
Si aplicamos esta expresión a un punto en la superficie de la tierra queda:

$$E\,.\cos 180^o\,.\,4.\pi.R_T^2 = -4.\pi.G.M_T \iff E_{SUP} = \frac{G.M_T}{R_T^2}$$

Si lo aplicamos a un punto por encima de la superficie:

$$E\,.\cos 180^o\,.\,4.\pi.R^2 = -4.\pi.G.M_T \iff E_{FUERA} = \frac{G.M_T}{R^2}$$

Se observa que es menor que en la superficie terrestre ya que $R>R_T$.
Si lo calculamos en el interior veamos que también es menor que en la superficie:



$$E\,.\cos 180^o\,.\,4.\pi.R^2 = -4.\pi.G.M_{INT} \iff E_{DENTRO} = \frac{G.M_{INT}}{R^2}$$

Si suponemos densidad constante en toda la Tierra:

$$\frac{M_T}{V_T} = \frac{M_{INT}}{V_{INT}} \iff \frac{M_T}{{}^4\!/_3\,\pi.R_T^3} = \frac{M_{INT}}{{}^4\!/_3\,\pi.R^3}$$

$$M_{INT} = M_T.\frac{R^3}{R_T^3}$$

Si llevamos esta expresión a la del campo en el interior de la Tierra:

$$E_{DENTRO} = \frac{G.M_T}{R^2}.\frac{R^3}{R_T^3} = \frac{G.M_T}{R_T^2}.\frac{R}{R_T} = E_{SUP}.\frac{R}{R_T}$$

se ve que también es menor el campo dentro de la Tierra que en la superficie ya que en esta fórmula $R<R_T$.

15.- D. Si aplicamos la definición de campo :

$E_T=E_L$

$$\frac{G.M_T}{x^2} = \frac{G.M_L}{(d-x)^2} \iff M_T.(d-x)^2 = M_L.x^2$$

Dado que $M_T=81.M_L$ si sustituimos arriba y simplificamos queda:

$$81.(d-x)^2 = x^2 \iff 9.(d-x)=x$$

$$x=\frac{9}{10}.d=\frac{9}{10}.384000\ Km = 345600\ Km$$

16.- B. Por la tercera ley de Kepler, los cuadrados de los períodos son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas.

La A es falsa, la ley de las áreas dice que cuando las áreas barridas por un astro en su órbita son iguales los tiempos en recorrerlas también lo son (o sea, velocidad areolar constante).

La C es falsa, ya que la tangente a las líneas de campo en un punto indica la dirección de la intensidad de campo, y el sentido lo indica el mismo sentido de esas líneas.

La D es falsa ya que los campos no se propagan de forma instantánea a través del espacio.

17.- A. Aplicando la ley de gravitación universal de Newton a las dos situaciones:

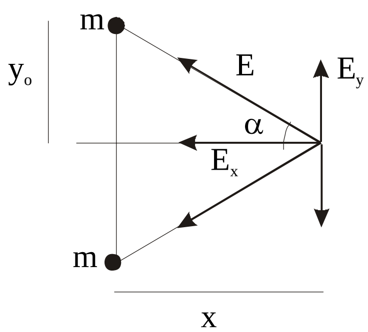
$$\frac{16}{9}=\frac{G.M.m/R^2}{G.M.m/(R+h)^2} \iff \frac{16}{9}=\left(\frac{R+h}{R}\right)^2 \iff \frac{4}{3}=1+\frac{h}{6000\ Km} \iff h=2000\ Km$$

18.- C. Si aplicamos la 3ª ley de Kepler entre los períodos y los radios queda:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 \iff \left(\frac{8\ días}{1\ día}\right)^2=\left(\frac{d}{d'}\right)^3 \iff d'=\frac{d}{4}$$

19.- B. Para calcular el campo creado por las dos masas, se aplica el principio de superposición y al valor que se obtiene, se le deriva respecto de *x* e iguala a cero para hallar la abscisa en la que el campo es máximo.

Como se observa en el dibujo el campo resultante sólo tiene componente *X* que es el doble de la del campo creado por una masa:



$$E_R = 2\ Ex = 2\ E\ .\cos\alpha$$

$$E_R=2.\frac{G.M}{y_o^2+x^2}.\frac{x}{(y_o^2+x^2)^{1/2}}=\frac{2.G.M.x}{(y_o^2+x^2)^{3/2}}$$

Derivando la expresión anterior e igualando a cero queda:

$$0=2.G.M.\left[\frac{(y_o^2+x^2)^{3/2}-x.\frac{3}{2}.2.x.(y_o^2+x^2)^{1/2}}{(y_o^2+x^2)^3}\right]$$

$$0=(y_o^2+x^2)^{3/2}-x.\frac{3}{2}.2.x.(y_o^2+x^2)^{1/2} \iff (y_o^2+x^2)^{3/2}=3.x^2.(y_o^2+x^2)^{1/2}$$

$$(y_o^2+x^2)=3.x^2 \iff y_o^2=2.x^2 \iff x=\frac{y_o}{\sqrt{2}}=\frac{y_o.\sqrt{2}}{2}$$

20.- D. El potencial es un escalar.

21.- B. El flujo eléctrico es una magnitud escalar que depende del valor de las cargas encerradas dentro de la superficie y no del tamaño de ésta. El signo del flujo lo da el de la carga neta encerrada dentro de la superficie.

22.- D. La ley de gravitación universal de Newton aplicada al cuerpo al nivel del mar da un peso *P* y a una altura *h* sobre el mar da un peso 0,8.*P*:

$$P = \frac{G.M.m}{R^2} \qquad 0{,}8\,.\,P = \frac{G.M.m}{(R+h)^2}$$

Se dividen ambas expresiones, se despeja h, se sustituye *R*=6400 *Km* y da:

$$\frac{1}{0{,}8} = \frac{(R+h)^2}{R^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{0{,}8}} = \frac{(R+h)}{R} \Leftrightarrow h = \frac{R\,.\left(1-\sqrt{0{,}8}\right)}{\sqrt{0{,}8}} = 755\ Km$$

23.- D. Desde el punto de vista de un sistema inercial el satélite realiza un movimiento circular y uniforme cuya fuerza centrípeta es de naturaleza gravitatoria:

$$F_G = m.a_{CP} \Leftrightarrow \frac{G.M.m}{r^2} = m.\omega^2.r = m.\frac{4\pi^2}{T^2}.r \Leftrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$$

puesto que el resultado aparece en función de *g*, se hace el cambio:

$$g = \frac{G.M}{R^2} \Leftrightarrow G.M = g.R^2$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{R^2.g} \Leftrightarrow T = \frac{2.\pi}{R.\sqrt{g}}.r^{\frac{3}{2}}$$

24.- C. A cierta altura el peso de un objeto es:

$$P = \frac{G\,.\,M_T\,.\,m}{(R_T+h)^2} = \frac{G\,.\,\rho\,{}^4\!/_3\,\pi R_T^3\,.\,m}{(R_T+h)^2}$$

A cierta profundidad, si se aplica el Teorema de Gauss, el peso del objeto sólo depende de la masa de Tierra que haya por debajo de él (M_{int}):

$$P = \frac{G\,.\,M_{\text{int}}\,.\,m}{(R_T-y)^2} = \frac{G\,.\,\rho\,{}^4\!/_3\,\pi (R_T-y)^3\,.\,m}{(R_T-y)^2}$$

Igualando ambas expresiones y simplificando se logra:

$$\frac{R_T^3}{(R_T+h)^2} = \frac{(R_T-y)^3}{(R_T-y)^2} \Rightarrow \frac{R_T^3}{(R_T+h)^2} = (R_T-y) \Rightarrow y = R_T - \frac{R_T^3}{(R_T+h)^2}$$

25.- D. La fuerza centrípeta que mueve al satélite es de naturaleza gravitatoria: $F_{CP}=F_G$:

$$m_F.\omega^2.R = \frac{G.M_M.m_F}{R^2} = m_F.\frac{4.\pi^2}{T^2}.R$$

$$\frac{4.\pi^2}{T^2}.R = \frac{G.M_M}{R^2},$$

si la aceleración superficial en Marte es 0,1.g :

$$0{,}1.g = 0{,}1.10 = 1 = \frac{G.M_M}{{R_M}^2} \Leftrightarrow G.M_M = {R_M}^2.$$

Si esto lo llevamos a la ecuación escrita dos líneas más arriba se obtiene al fin *T* en función de datos conocidos:

$$\frac{4.\pi^2}{T^2}.R = \frac{R_M{}^2}{R^2} \qquad T = \frac{2.\pi}{R_M}\sqrt{R^3} = \frac{2.\pi}{3.10^6}\sqrt{10^{21}} = \frac{2.\pi}{3}.10^{9/2}\ s$$

26.- C. Llamemos P_h al peso a una altura h y P_o al peso al nivel del mar, entonces:

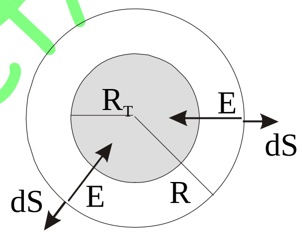
$$P_h = \tfrac{1}{4}.P_o \Leftrightarrow \frac{G\,M_T\,m}{(R_T+h)^2} = \tfrac{1}{4}.\frac{G\,M_T\,m}{R_T{}^2}$$

si se simplifica

$$\frac{R_T+h}{R_T} = 2 \quad \Rightarrow \quad h = R_T$$

Un razonamiento más rápido sería decir que como el peso depende del inverso del cuadrado de la distancia al centro de la Tierra, al duplicarse ésta el peso queda reducido a la cuarta parte. El doble de distancia supone estar a una altura igual al radio terrestre.

27.- B. Para calcular el campo gravitatorio terrestre se emplea la Ley de Gauss para el flujo gravitatorio:

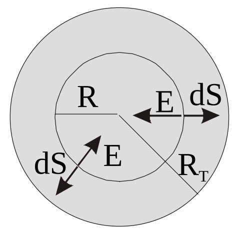


$$\phi_{GRAVIT} = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \oint_S E.\cos\alpha\,.\,dS = -4.\pi.G.M_{INT}$$

Si lo aplicamos a un punto por encima de la superficie:

$$E\,.\cos 180^o\,.\,4.\pi.R^2 = -4.\pi.G.M_T \quad \Leftrightarrow \quad E_{FUERA} = \frac{G.M_T}{R^2}$$

Se observa que es menor que en la superficie terrestre y que decrece con el cuadrado de la distancia al centro de la Tierra.



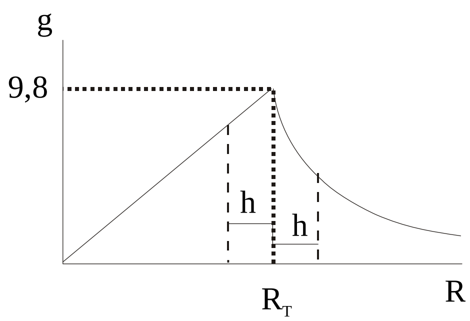
Si lo calculamos en el interior:

$$E\,.\cos 180^o\,.\,4.\pi.R^2 = -4.\pi.G.M_{INT} \quad \Leftrightarrow \quad E_{DENTRO} = \frac{G.M_{INT}}{R^2}$$

Si suponemos densidad constante en toda la Tierra:

$$\frac{M_T}{V_T} = \frac{M_{INT}}{V_{INT}} \Leftrightarrow \frac{M_T}{\tfrac{4}{3}\pi.R_T^3} = \frac{M_{INT}}{\tfrac{4}{3}\pi.R^3}$$

$$M_{INT} = M_T.\frac{R^3}{R_T^3}$$



Si llevamos esta expresión a la del campo en el interior de la Tierra:

$$E_{DENTRO} = \frac{G.M_T}{R^2}.\frac{R^3}{R_T^3} = \frac{G.M_T}{R_T^2}.\frac{R}{R_T} = E_{SUP}.\frac{R}{R_T}$$

se ve que es directamente proporcional a la distancia al centro.

Si representamos gráficamente estas dos funciones se observa que para un mismo valor de h por encima y por debajo de la superficie, el campo es mayor por debajo.

28.- C. Si se aplica el Teorema de Gauss del campo gravitatorio:

$$\phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = -4.\pi.G.\sum M_{INTERIORES} = -4.\pi.G.(3.M) = -12.\pi.G.M$$

29.- C. Esta es la 2ª Ley de Kepler o ley de las áreas. Ello conlleva que el planeta se mueva más rápido cuando está cerca que cuando está lejos, lo que invalida la opción D.

La A para que fuese correcta debería decir que es el Sol el que está en uno de los focos de la elipse (1ª Ley de Kepler).

La B sería la 3ª Ley de Kepler (ley de los períodos) si dijese que los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas.

30.- A. La fuerza que hace girar al satélite visto desde un sistema inercial es únicamente la gravitatoria que le permite girar con aceleración centrípeta en un movimiento circular uniforme:

$$F_G = m.a_{CP} \Leftrightarrow \frac{G.M.m}{r^2} = m.\omega^2.r = m.\frac{4\pi^2}{T^2}.r \Leftrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM} \Leftrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

31.- B. Según la ley de gravitación de Newton:

$$P = \frac{G.M_T.m}{R_T^2}$$

Si expresamos la masa de la Tierra en función de su densidad media:

$$M_T = \rho.V_T = \rho.\tfrac{4}{3}.\pi.R_T^3$$

Sustituyendo en la expresión del peso queda:

$$P = \frac{G.\rho.\tfrac{4}{3}.\pi.R_T^3.m}{R_T^2} = G.\rho.\tfrac{4}{3}.\pi.R_T.m$$

Se observa que el peso es directamente proporcional al radio de la Tierra, entonces si éste se duplica, el peso también lo hará.

32.- C. La ley de atracción universal queda como

$$\frac{G.M_T.m}{x^2} = \frac{G.M_L.m}{(d-x)^2}$$

sustituyendo $M_T = 81\ M_L$

$$\frac{81.M_L}{x^2} = \frac{M_L}{(d-x)^2}$$

eliminando M_L y extrayendo raíz cuadrada:

$$\frac{9}{x} = \frac{1}{d-x} \Leftrightarrow 9.d - 9.x = x \Leftrightarrow x = \frac{9}{10}.d = \frac{9}{10}.384400\ Km = 345960\ Km$$