SOLUCIONES AL TEST 9

1. D. Un campo de fuerzas es conservativo si es irrotacional, o sea:

$$rot\ \vec{F} = \vec{0} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ 2xy & x^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.i + 0.j + (2x - 2x)k = \vec{0}$$

2. C. Esta es la 2ª Ley de Kepler o ley de las áreas. Ello conlleva que el planeta se mueva más rápido cuando está cerca que cuando está lejos, lo que invalida la opción D.

   La A para que fuese correcta debería decir que es el Sol el que está en uno de los focos de la elipse (1ª Ley de Kepler).

   La B sería la 3ª Ley de Kepler (ley de los períodos) si dijese que los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas.

3. C. La 2ª ley de la dinámica de rotación $\vec{\alpha} = \dfrac{\sum \vec{M}}{I}$ expresa que la aceleración angular es directamente proporcional al momento resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo e inversamente proporcional al momento de inercia de éste. Así a mayor momento de inercia menos aceleración angular.

   Los momentos de inercia son infinitos como lo son los ejes alrededor de los que puede girar el objeto. Esto invalida la opción A.

   La opción B es falsa ya que las masas son siempre positivas y también los son los cuadrados de las distancias al eje de giro de esas masas. La definición de I dada en B hace que el momento de inercia dependa del eje de giro pues al variar éste varían las distancias de las partículas a él y ello anula la respuesta D.

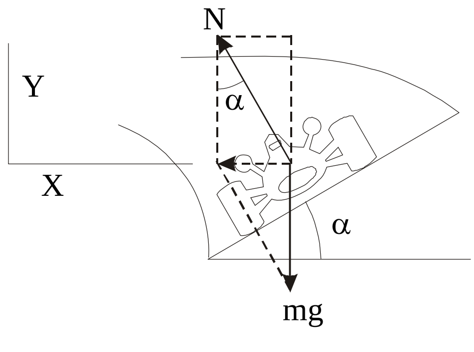
4. La cinemática de un movimiento uniformemente acelerado nos permite calcular la aceleración a partir de las velocidades y el espacio:

$$a = \frac{v_f^2 - v_o^2}{2.\Delta e} = \frac{\left(600\ m/s\right)^2 - \left(0\ m/s\right)^2}{2.3\ m} = 60.000\ m/s$$

   Ahora si aplicamos la 2ª ley de Newton:

$$F = m.a = 5\ Kg\ .\ 6.10^4\ m/s = 3.10^5\ N$$

5. D. Si no hay rozamiento y aplicamos la 2ª ley de Newton a un sistema de ejes inercial situado en el centro de la curva, tendremos:



   Eje Y: $N.\cos\alpha - mg = 0$

   Eje X: $N.sen\ \alpha = m.a_{cp}$

   Se observa sólo aceleración en el eje X que corresponde a una aceleración centrípeta:

   Eje Y: $N.\cos\alpha = mg$

   Eje X: $N.sen\ \alpha = m.v^2/R$

   Si se dividen ambas expresiones queda:

$$tag\ \alpha = \frac{v^2}{R.g} = \frac{\left(20\ m/s\right)^2}{35\ m\ .\ 9{,}8\ m/s^2} = 1{,}166 \iff \alpha = 49{,}38^\circ$$

6. B. Inicialmente la carga de A es 10 veces mayor que la de B:

$$Q_A^O = 10.Q_B^O$$

Si ponemos en contacto A y C y sus radios son iguales entonces tendrán igual capacidad y se repartirán la carga inicial de A, de modo que ahora:

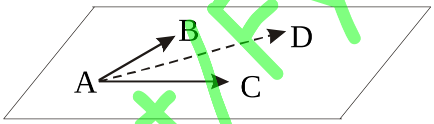
$$Q_A^F = 5\,.\,Q_B^O \quad ; \quad Q_C^F = 5\,.\,Q_B^O$$

Al dejar la bola C entre la línea de unión AB se quedará en un punto donde se equilibren las fuerzas repulsivas sobre ella:

$$F_{AC} = F_{BC} \;\; ; \;\; \frac{K.(5q).(5q)}{x^2} = \frac{K.q.(5q)}{(1-x)^2} \;\; \Leftrightarrow \;\; \frac{5^2}{x^2} = \frac{5}{(1-x)^2}$$

$$\sqrt{5}.(1-x) = x \;\; \Leftrightarrow \;\; \sqrt{5} - \sqrt{5}.x = x \;\; \Leftrightarrow \;\; \sqrt{5} = x.\left(1+\sqrt{5}\right) \;\; \Leftrightarrow \;\; x = 0{,}691\, m$$

7. A. Si están en un plano el vector $\vec{AD}$ es combinación lineal de $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ lo que quiere decir que:



$$\overrightarrow{AD} = \alpha.\overrightarrow{AB} + \beta.\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \alpha.\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + \beta.\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)$$

Si lo llevamos todo al mismo miembro y sacamos factor común:

$$\vec{0} = O\vec{A}.(1-\alpha-\beta) + O\vec{B}.(\alpha) + O\vec{C}.(\beta) + O\vec{D}.(-1)$$

La expresión del enunciado es:

$$\vec{0} = \overrightarrow{OA}.(a) + \overrightarrow{OB}.(b) + \overrightarrow{OC}.(c) + \overrightarrow{OD}.(d)$$

Si comparamos ambas expresiones e igualamos los coeficientes de los vectores:

$$(1-\alpha-\beta) = a \;\; ; \;\; (\alpha) = b \;\; ; \;\; (\beta) = c \;\; ; \;\; (-1) = d$$

Si sumamos todos los miembros de la izquierda por un lado y todos los de la derecha por otro queda la expresión:

$$a + b + c + d = 0$$

8. B. Por el teorema de conservación de la energía, la potencia eléctrica de entrada en un transformador es igual a la de salida si despreciamos las pérdidas por corrientes de Foucault en el núcleo. O sea:

$$P_E = P_S \;\; \Leftrightarrow \;\; V_E.I_E = V_S.I_S$$

Entonces se entiende que si a la salida de la central productora de electricidad se eleva V tendrá que disminuir I. Con ello se consigue disminuir las pérdidas por efecto Joule (calentamiento del cable) que hay en el transporte de esa corriente hasta los usuarios. Estas pérdidas dependen del cuadrado de la intensidad y por ello es importante disminuirla:

$$Q = R.I^2.t$$

La A es falsa. Es al revés, si el primario tiene más espiras entonces en el secundario se reduce la tensión. Ello se debe a la Ley de Faraday-Lenz:

$$V = -N\,.\,\frac{d\phi}{dt}$$

La variación de flujo por unidad de tiempo es la misma en ambos arrollamientos, puesto que se transmite a través del núcleo de hierro dulce. Entonces:

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_E = \left(\frac{d\phi}{dt}\right)_S \;\; \Leftrightarrow \;\; \left(\frac{V}{N}\right)_E = \left(\frac{V}{N}\right)_S$$

o sea si disminuye el nº de espiras N también lo hace la fem de salida V.

La opción C es incorrecta ya que el núcleo de hierro se hace de láminas para dificultar las corrientes estacionarias o de Foucault, que son consumidoras de energía y disminuyen el rendimiento del transformador.

La opción D es mala, ya que las corrientes que se introducen en el bobinado primario o de entrada deben ser variables para que así haya una variación de campo magnético y por tanto de flujo, que es lo que provoca por inducción (Ley de Faraday-Lenz) otra corriente también variable en el secundario.

9. C. Se trata en efecto de una estacionaria que tiene de ecuación general:

$$\mathrm{Y} = 2.\mathrm{A.\,sen}\,(\omega.t)\,.\cos\,(k.x) = 2.\mathrm{A.\,sen}\,(\frac{2\pi}{T}.t)\,.\cos\,(\frac{2\pi}{\lambda}.x)$$

La A no sirve, pues la velocidad vale:

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\pi\ rad\,/\,0{,}1\ s}{\pi\ rad\,/\,100\ cm} = \frac{100\ cm}{0{,}1\ s} = 1000\ {cm}/{s} = 10\ {m}/{s}$$

La longitud de la onda es:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{\pi}{100} = \frac{2\pi}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = 2.100 = 200\ cm$$

La distancia entre dos nodos siempre vale la mitad de una longitud de onda, o sea en este caso sería de 100 cm.

10. A. La 1ª Ley de Maxwell es la ley de Gauss para el campo electrostático:

$$\phi_{ELECT} = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q_{INTERIOR}}{\varepsilon}$$

La opción B es incorrecta. La 2ª Ley de Maxwell (de Gauss para el campo magnético) aquí bien formulada:

$$\phi_{MAGNET} = \oint_S \vec{B}.d\vec{S} = 0$$

nos dice que el flujo del campo magnético a través de cualquier superficie cerrada es cero. Ello implica que no existan ni fuentes ni sumideros de líneas dentro de dicha superficie. O dicho de otra forma que sea imposible aislar un polo magnético, ya que de ser así el flujo a través de una superficie que lo contuviera ya no sería cero, sino positivo si fuese un polo Norte (fuente de líneas) o negativo si fuese un polo Sur (sumidero de líneas). Ésta ley no se usa para calcular la intensidad de un campo magnético.

La opción C es falsa. No es la 3ª sino la 4ª ley de Maxwell (ley de Ampère generalizada) es:

$$\oint_L \vec{B}.d\vec{l} = \mu_o.\left(\sum i_c + i_s\right) + \mu_o.\varepsilon_o.\frac{d\phi_{ELECT}}{dt}$$

Aquí se expresa que el campo magnético B se produce por corrientes de conducción y de superficie (primer sumando) o bien por corrientes de desplazamiento (variaciones de campo eléctrico que provoquen variaciones del flujo eléctrico que es el 2º sumando).

La opción D está mal expresada., es la 3ª ley de Maxwell (Ley de inducción o de Faraday-Lenz) es:

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E}_{ELECT\ INDUCIDO}.d\vec{l} = -\frac{d\phi_{MAGNÉTICO}}{dt}$$

Expresa cómo se origina una fuerza electromotriz inducida (ε) por un flujo de campo magnético variable. Hay que insistir en que el campo eléctrico inducido creado no es conservativo como lo es el electrostático, ya que su circulación a través de una línea cerrada (valor de esa integral) no es cero.

11. B. La expresión de un triple producto vectorial entre vectores es:

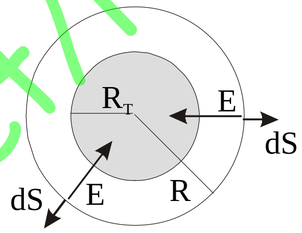
$$\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \\ \vec{v}_1 . \vec{v}_2 & \vec{v}_1 . \vec{v}_3 \end{vmatrix}$$

Se calcula entonces antes los productos escalares ahí expresados:

$$v_1 . v_2 = (1,1,1) . (1,0,-1) = 1 - 1 = 0$$
$$v_1 . v_3 = (1,1,1) . (1,-1,1) = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{v}_2 = (1,0,-1) = \vec{v}_4$$

12. B. Para calcular el campo gravitatorio terrestre se emplea la Ley de Gauss para el flujo gravitatorio:



$$\phi_{GRAVIT} = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \oint_S E.\cos\alpha . dS = -4.\pi.G.M_{INT}$$

Si aplicamos esta expresión a un punto en la superficie de la tierra queda:

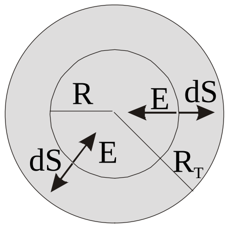
$$E . \cos 180^o . 4.\pi.R_T^2 = -4.\pi.G.M_T \quad \Leftrightarrow \quad E_{SUP} = \frac{G.M_T}{R_T^2}$$

Si lo aplicamos a un punto por encima de la superficie:

$$E . \cos 180^o . 4.\pi.R^2 = -4.\pi.G.M_T \quad \Leftrightarrow \quad E_{FUERA} = \frac{G.M_T}{R^2}$$

Se observa que es menor que en la superficie terrestre ya que $R>R_T$.

Si lo calculamos en el interior veamos que también es menor que en la superficie:



$$E . \cos 180^o . 4.\pi.R^2 = -4.\pi.G.M_{INT} \quad \Leftrightarrow \quad E_{DENTRO} = \frac{G.M_{INT}}{R^2}$$

Si suponemos densidad constante en toda la Tierra:

$$\frac{M_T}{V_T} = \frac{M_{INT}}{V_{INT}} \Leftrightarrow \frac{M_T}{{}^4\!/_3\,\pi.R_T^3} = \frac{M_{INT}}{{}^4\!/_3\,\pi.R^3}$$

$$M_{INT} = M_T . \frac{R^3}{R_T^3}$$

Si llevamos esta expresión a la del campo en el interior de la Tierra:

$$E_{DENTRO} = \frac{G.M_T}{R^2} . \frac{R^3}{R_T^3} = \frac{G.M_T}{R_T^2} . \frac{R}{R_T} = E_{SUP} . \frac{R}{R_T}$$

se ve que también es menor el campo dentro de la Tierra que en la superficie ya que en esta fórmula $R<R_T$.

13. D. La sonoridad en decibelios viene dada en el S.I. por la expresión:

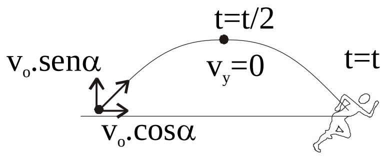
$$B = 10.\log \frac{I}{10^{-12}}$$

Si una fuente de intensidad I tiene 40 *dB* y N fuentes con intensidad total N.I tienen 80 *dB* se verifica que:

$$40 = 10.\log\frac{I}{10^{-12}} \quad ; \quad 80 = 10.\log\frac{N.I}{10^{-12}}$$

Si restamos ambas expresiones queda: $40 = 10.\log N \Leftrightarrow N = 10^4$

14. D. En el momento del impacto se verifica:



$$x = v_o.t.\cos\alpha$$

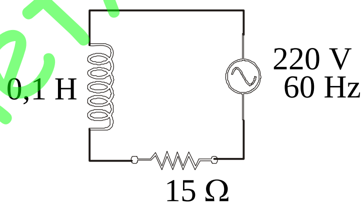
En el punto más alto de la bala la velocidad vertical es cero y el tiempo es la mitad del que hay en el impacto:

$$v_y = 0 = v_o.\text{sen}\,\alpha - g.\left(\frac{t}{2}\right) \Leftrightarrow v_o.\text{sen}\,\alpha = g.\left(\frac{t}{2}\right)$$

Si dividimos la expresión primera y esta última tendremos el ángulo buscado:

$$tag\,\alpha = \frac{g.t^2}{2.x} = \frac{9{,}8.{}^{m}\!/_{s^2}.(10{,}25\,s)^2}{2.100\,m} \Leftrightarrow \alpha = 79{,}01^{\circ}$$

15. A. En un circuito de corriente alterna el desfase entre la corriente y la fem es:



$$\cos\alpha = \frac{R}{Z}$$

Donde R es la resistencia óhmica y Z la impedancia que se obtiene a partir de R, la autoinducción L y la frecuencia f con la fórmula:

$$Z = \sqrt{R^2 + (L.2.\pi.f)^2} = \sqrt{(15\,\Omega)^2 + (0{,}1\,H.2.\pi.60\,Hz)^2} = 40{,}57\,\Omega$$

Entonces el ángulo de desfase es:

$$\cos\alpha = \frac{R}{Z} = \frac{15}{40{,}57} \Leftrightarrow \alpha = 1{,}19\,rad$$

16. B. Es cierto que siempre la aceleración tangencial, como su nombre indica es tangente a la trayectoria. Igual ocurre con la velocidad, ya que se define a través de la derivada del vector de posición, por lo que si $d\vec{r}$ es tangente a la trayectoria, la velocidad también lo será. Entonces siempre tienen la misma dirección $\vec{v}$ y $\vec{a}_T$. Si coinciden en sentido el movimiento es acelerado y si no es así será retardado.

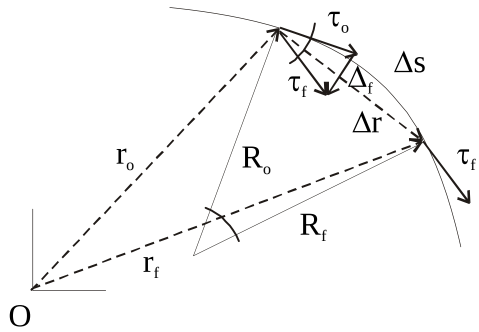
La A es incorrecta en el sentido de que se debe afirmar que la aceleración es la suma vectorial de las componentes intrínsecas (tangencial y normal o centrípeta).

La C: la aceleración normal o centrípeta tiene sentido hacia dentro de la curva. Sí es cierto que hace cambiar la dirección de la velocidad y es perpendicular a ella.

La D: debe ser ${}^{d\tau}\!/_{dl} = {}^{1}\!/_{R}$.

Cuando el intervalo de tiempo se hace infinitamente pequeño, se verifica que:

- El arco Δs y la cuerda Δr tienden a ser iguales y se transforman en elementos infinitesimales: $ds = dl$.
- El centro de curvatura es único así como los radios de curvatura: $R_o = R_f = R$.

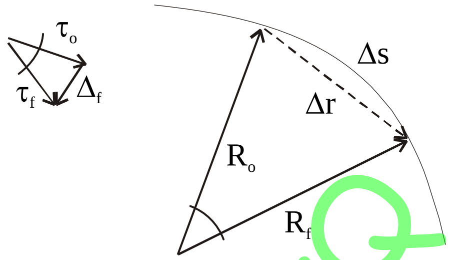


- Por trigonometría $ángulo(rad) = {}^{arco(m)}\!/_{radio(m)}$, lo que aplicado a los triángulos semejantes de la derecha de la figura, y teniendo en cuenta que el módulo del vector unitario τ vale uno, hace que:

$$ángulo = \frac{d\tau}{1} = \frac{ds}{R}$$

Despejando se obtiene:

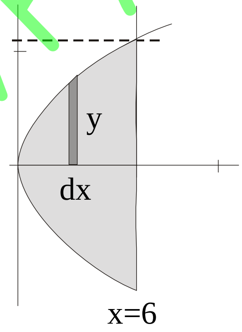
$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R}$$



17. B. La ecuación $y^2=5.x$ es una parábola de vértice en origen de coordenadas y la ecuación $x=6$ es una recta vertical de abscisa 6.

Dada la simetría de la figura respecto del eje *X*, la coordenada *Y* del centro de masas es 0.

Para calcular la *X* del centro de masas lo haremos para la mitad superior de la figura, ya que es la misma que la de la mitad inferior, así como la de la figura entera. Los trozos elementales de área tienen de altura *Y* y de base *dx*. Así:



$$X_{CM} = \frac{\int_0^6 x.dS}{\int_0^6 dS} = \frac{\int_0^6 x.y.dx}{\int_0^6 y.dx} = \frac{\int_0^6 x.\sqrt{5}.\sqrt{x}.dx}{\int_0^6 \sqrt{5}.\sqrt{x}.dx} =$$

$$X_{CM} = \frac{\int_0^6 x.\sqrt{x}.dx}{\int_0^6 .\sqrt{x}.dx} = \frac{\left[\frac{x^{5/2}}{5/2}\right]_0^6}{\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^6} = \frac{3}{5}.\frac{6^{5/2}}{6^{3/2}} = \frac{3}{5}.6 = 3{,}6$$

18. A. . El rendimiento de un ciclo de Carnot entre un foco frío a T_F y otro caliente a T_C, sigue la fórmula:

$$\eta = \frac{T_C - T_F}{T_C} = \frac{(273+398)-(273+175)}{(273+398)} = 0{,}332$$

19. C. El movimiento circular y uniforme tiene de ecuación general para el vector de posición:

$$\vec{r} = \left(X_C + R.\cos(w.t+\varphi_o)\right).i + \left(Y_C + R.\mathrm{sen}(w.t+\varphi_o)\right).j$$

donde el centro estaría situado en (X_C, Y_C) , el radio sería *R*, la velocidad angular sería *w* y por último la fase inicial sería φ_o.

Entonces en este caso el centro está en (1,0), el radio es 1, la velocidad angular es de π rad/s y la fase inicial es de 0º. Por último la frecuencia sería:

$$\upsilon = \frac{w}{2.\pi} = \frac{\pi\ {}^{rad}\!/_{s}}{2.\pi\ rad} = 0{,}5\ Hz.$$

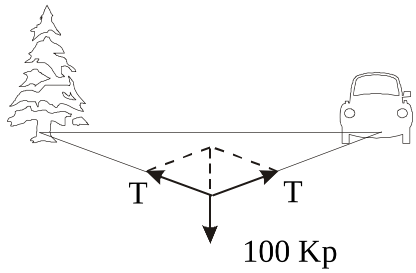
20. C. El módulo de la resultante entre dos vectores se puede calcular si se conocen los módulos y el ángulo que forman entre sí dichos vectores.

$$R=\sqrt{A+B+2.A.B.\cos\alpha}$$

$$100=\sqrt{T^2+T^2+2.T.T.\cos\alpha}$$

$$100^2=2T^2+2T^2.\cos\alpha$$

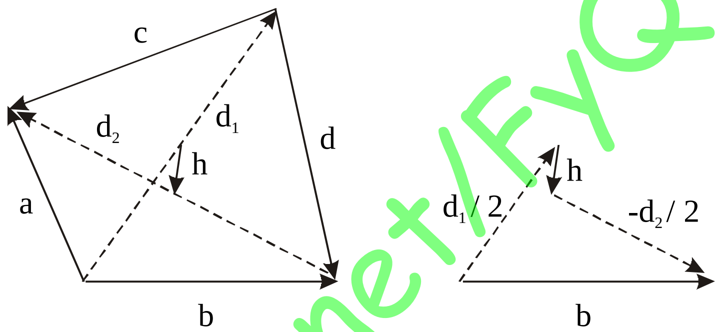
$$100^2=2T^2.(1+\cos\alpha)\ \Leftrightarrow T^2=\frac{T^2}{2.(1+\cos 160^{o})}$$



$$T=\sqrt{\frac{100^2\ Kp^2}{2.(1+\cos 160^{o})}}=287{,}9\ Kp$$

21. B. De la figura se puede deducir que:

$$\vec{a}-\vec{c}=\vec{d}_1$$
$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}_2$$
$$\vec{c}-\vec{d}=\vec{d}_2$$
$$\vec{b}-\vec{d}=\vec{d}_1$$
$$\frac{\vec{d}_1}{2}+h-\frac{\vec{d}_2}{2}=\vec{b}$$



$$\vec{h}=\frac{\vec{d}_2}{2}+\vec{b}-\frac{\vec{d}_1}{2}=\frac{1}{2}.\left(\vec{d}_2+2.\vec{b}-\vec{d}_1\right)=\frac{1}{2}.\left[\left(\vec{c}-\vec{d}\right)+2.\vec{b}-\left(\vec{b}-\vec{d}\right)\right]$$

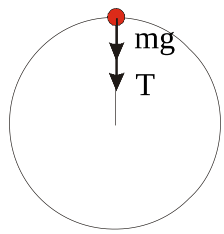
$$\vec{h}=\frac{1}{2}.\left(\vec{c}+\vec{b}\right)$$

Como $\vec{a}+\vec{d}-\vec{c}-\vec{b}=\vec{0}\ \Leftrightarrow\ \vec{a}+\vec{d}=\vec{c}+\vec{b}$ entonces:

$$\vec{h}=\frac{1}{4}.\left(\vec{c}+\vec{b}\right)+\frac{1}{4}.\left(\vec{c}+\vec{b}\right)=\frac{1}{4}.\left(\vec{c}+\vec{b}\right)+\frac{1}{4}.\left(\vec{a}+\vec{d}\right)$$

Finalmente: $\vec{h}=\frac{1}{4}.\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)$

22. A. En el movimiento circular hay una aceleración centrípeta producida por la Tensión y el peso. En este caso si aplicamos la 2ª Ley de Newton desde un Sistema Inercial situado en el centro de la Trayectoria:



$$\sum\vec{F}=m.\vec{a}\ \Leftrightarrow\ T+mg=m.\omega^2.R$$

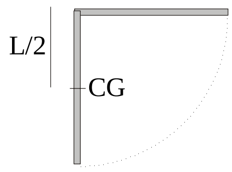
$$T=m.\left(\omega^2.R-g\right)=$$

$$0{,}075\ Kg.\left(\left[\frac{120\ rev.\ {}^{2.\pi\ rad}/_{1\ rev}}{1\ min.\ {}^{60\ s}/_{1\ min}}\right]^2.0{,}5\ m-9{,}8\ {}^{m}/_{s^2}\right)=5{,}18\ N$$

23. D. Para calcular el intercambio de calor se sabe que en valor absoluto el calor absorbido por el agua fría es igual al cedido por la caliente:

$M\ .\ Ce\ .\ |\Delta T|=M'\ .\ Ce\ .\ |\Delta T'|\ \Rightarrow\ M\ .\ (68\text{-}18)°C=25000\ Kg\ .\ (18\text{-}16)°C$

Despejando queda *M=1000 Kg* que es *1 m^3*, lo que con caudal de *2 m^3/h* supone un tiempo de *0,5 h*.



24. A. Apliquemos el principio de conservación de la energía mecánica. Al principio tenemos la energía potencial del centro de masas que está a una altura de $L/2$, y al final energía cinética de rotación de la varilla en torno al extremo.

$$E_P = E_{CIN} \qquad m.g.(L/2) = ½ . I. \omega^2.$$

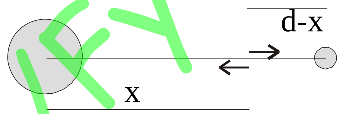
Por Steiner:

$$I = I_G + m . d^2 = (1/12) . m . L^2 + m . (L/2)^2 = (1/3) . m . L^2.$$

$$m.g.(L/2) = ½ . (1/3) . m . L^2. \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3.9{,}8\ m/s^2}{1{,}5\ m}} = 4{,}427\ rad/s$$

25. D. Si aplicamos la definición de campo :



$$E_T = E_L$$

$$\frac{G.M_T}{x^2} = \frac{G.M_L}{(d-x)^2} \Leftrightarrow M_T.(d-x)^2 = M_L.x^2$$

Dado que $M_T = 81.M_L$ si sustituimos arriba y simplificamos queda:

$$81.(d-x)^2 = x^2 \Leftrightarrow 9.(d-x) = x$$

$$x = \frac{9}{10}.d = \frac{9}{10}.384000\ Km = 345600\ Km$$