SOLUCIONES AL TEST 4

1. A. El vector gradiente de un escalar se define como:

$$\overrightarrow{grad}\, A = \frac{\partial A}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial A}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{k}$$

podemos calcular el vector gradiente de la magnitud A, obteniendo:

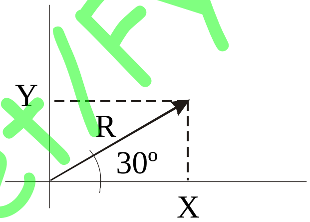
$$\overrightarrow{grad}\, A = (2xy + 3yz)\vec{i} + \left(x^2 + 3xz\right)\vec{j} + (3xy - 6z)\vec{k}$$

El valor de este vector en el punto (0,1,0) es:

$$\overrightarrow{grad}\; A_{(0,1,0)} = \vec{j}$$

cuyo módulo es uno.

2. B. El momento de inercia es un tensor.
3. C. De la figura se deduce que



$$x = R\cos 30^{o} = R\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = R\,sen 30^{o} = R\frac{1}{2}$$

sustituyendo en la ecuación de la trayectoria obtenemos:

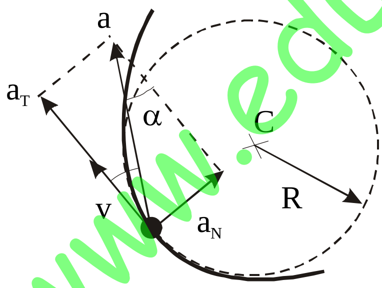
$$\left[\left(R\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(R\frac{1}{2}\right)^2\right]^2 = 4\left[\left(R\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(R\frac{1}{2}\right)^2\right] \Rightarrow R^4 = 4R^2\frac{1}{2} \Rightarrow R = \sqrt{2}$$

4. C. El vector posición del centro de masas viene definido por:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

sustituyendo los valores

$$\vec{r}_{cm} = \frac{(1.0 + 2.3 + 3.4)\vec{i} + (1.3 + 2.0 + 3.2)\vec{j} + (1.1 + 2.2{,}5 + 3.1)\vec{k}}{1 + 2 + 3} = 3\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k} \quad m$$



5. A. La aceleración centrípeta o normal, la podemos calcular de dos formas. O bien dividiendo el módulo de la velocidad al cuadrado entre el radio de curvatura, o multiplicando la aceleración por el seno del ángulo que forma con la velocidad:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = a.\text{sen}\,\alpha$$

Por otro lado de la definición del producto vectorial, podemos obtener el valor de ese seno:

$$a_N = a\,.\,\text{sen}\,\alpha = a\,.\,\frac{|\vec{a}\times\vec{v}|}{a.v} \qquad ya\ que\ |\vec{a}\times\vec{v}| = a.v.\text{sen}\,\alpha$$

Si combinamos ambas expresiones podemos despejar el Radio de curvatura:

$$R = \frac{v^3}{|\vec{a}\times\vec{v}|}$$

De las sucesivas derivadas de las posiciones obtenemos las componentes de la velocidad y de la aceleración:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(3.t.i) = 3\frac{m}{s} \quad ; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(-t^2 + 4.t) = (-2.t + 4)\frac{m}{s}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(3) = 0\frac{m}{s^2} \quad ; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(-2.t + 4) = -2\frac{m}{s^2}$$

Si sustituimos en estas expresiones el tiempo del enunciado se obtiene:

$$v_x = 3\frac{m}{s} \;;\; v_y = (-2.2 + 4) = 0\frac{m}{s} \;;\; a_x = 0\frac{m}{s^2} \;;\; a_y = -2\frac{m}{s^2}$$

Sustituyendo en la expresión de R:

$$R = \frac{\left(\sqrt{3^2 + (0)^2}\right)^3}{\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right\|} = \frac{3^2}{|(-6-0).k|} = \frac{3^2}{\sqrt{0^2 + 0^2 + (-6)^2}} = \frac{9}{6} = 4{,}5\,m$$

6. C. En el instante que empieza a descender se tiene que cumplir que el módulo de la fuerza de rozamiento sea igual a la resultante de la normal y el peso. La resultante es

$$R = mg\, sen\,\alpha$$

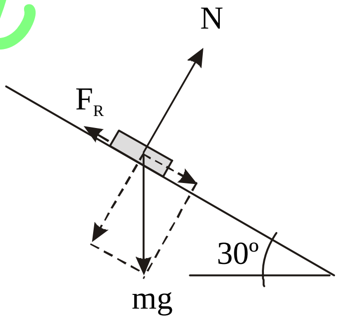
La fuerza de rozamiento es

$$F_r = \mu N$$

y como la normal es (ver figura)

$$N = mg\cos\alpha$$

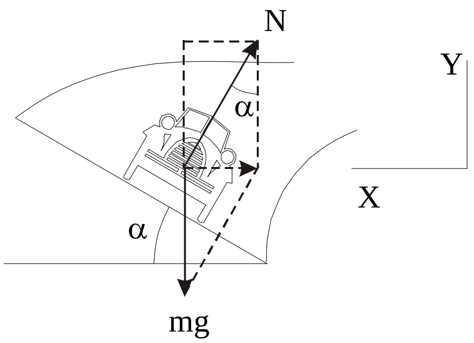
podemos concluir



$$\cancel{mg}\, sen\,\alpha = \mu \cancel{mg}\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{sen\,\alpha}{\cos\,\alpha} = tg\,\alpha$$

Al sustituir α por 30º, obtenemos $\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. A. En este caso las fuerzas que actúan son la normal (*N*) y el peso (*P*), tal y como se representa en la figura. La resultante de estas fuerzas está dirigida a lo largo del eje X. Aplicando la primera ley de Newton, se comprueba que el coche al tomar la curva lleva una aceleración, que tiene el mismo sentido y dirección que la resultante de las fuerzas (segunda ley de Newton). Ésta resultante es la causante de que aparezca una aceleración normal. Al tener la resultante sólo componente horizontal tenemos que aceptar que la componente vertical de la normal y el peso tienen que ser iguales en módulo, y que la resultante es la componente horizontal de la normal; es decir:



$$N\cos\alpha = mg$$

$$R = N\, sen\alpha$$

al aplicar la segunda ley de Newton en el eje X se obtiene:

$$N\,sen\alpha = m\frac{v^2}{R}$$

en donde se ha tenido en cuenta que la aceleración es la normal o centrípeta:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

siendo R el radio de curvatura.

Al sustituir el valor de la normal que se obtiene de la primera ecuación, en la que resulta de la segunda ley de Newton obtenemos:

$$\frac{\cancel{m}g}{\cos\alpha}\,\text{sen}\,\alpha = \cancel{m}\frac{v^2}{R} \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{R\,g\,\text{tg}\,\alpha} = \sqrt{400\,m\,.9{,}8\frac{m}{s^2}\,.\,\text{tg}\,18º} = 35{,}69\,m/s$$

8. C. La ecuación de dimensiones MLT^{-2} corresponde a una fuerza y no a un impulso angular.
9. C. Es la ecuación de un movimiento circular uniforme. La velocidad es perpendicular al radio (A) y su valor es en módulo Aω.
10. A. Sobre el globo actúan dos fuerzas: el peso y el empuje. Ambas tienen la misma dirección pero sentidos opuestos. La segunda ley de Newton implica que la aceleración que posee un cuerpo tiene la misma dirección y sentido que la resultante de las fuerzas aplicadas; matemáticamente:

$$\sum \vec{F} = m\,.\,\vec{a}$$

que representa a una ecuación vectorial. En el caso de que el globo descienda con una aceleración diez veces menor que la aceleración de la gravedad, indica que la resultante de las fuerzas está dirigida hacia abajo, y en consecuencia podemos escribir:

$$mg - E = m\frac{g}{10}$$

siendo m la masa del globo y todos sus accesorios y E el módulo del empuje. Cuando se ha soltado lastre la masa del globo y sus accesorios será m’, siendo m-m’ la masa del lastre arrojado, y en este caso el globo asciende con una aceleración de g/10; podemos aplicar la segunda ley de Newton:

$$E - m'g = m'\frac{g}{10}$$

ya que la resultante está dirigida hacia arriba. El empuje es el mismo en los dos casos, que dependerá del volumen del globo, y éste no ha variado. Despejando de ambas ecuaciones el empuje e igualando se obtiene:

$$\left.\begin{array}{r} E = mg - m\dfrac{g}{10} \\ E = m'\dfrac{g}{10} + m'g \end{array}\right\} \Rightarrow m\cancel{g} - m\frac{\cancel{g}}{10} = m'\frac{\cancel{g}}{10} + m'\cancel{g} \;\Rightarrow 10m - m = m' + 10m'$$

Tenemos la relación entre m, la masa del globo cuando desciende con aceleración, y m’, la masa del globo cuando asciende;

$$9m = 11m' \quad\Rightarrow\quad m' = \frac{9}{11}m \qquad\qquad m' = \frac{9}{11}550\;kg = 450\;kg$$

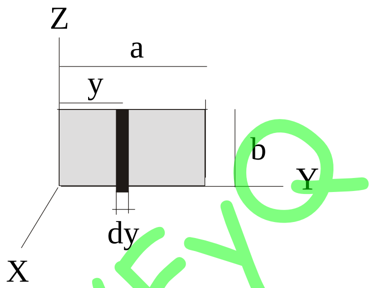
luego el lastre arrojado es 550 kg – 450 kg = 100 kg.

11. A. Las fuerzas centrales, no poseen momento respecto del punto al que están dirigidas en todo momento, ya que forman un ángulo de 180º con el vector de posición. Entonces se conserva el momento cinético o angular:

$$\sum \vec{M} = \frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{J} = cte.$$

$$m.v_1.R_1 = m.v_2.R_2 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = \frac{v_2.R_2}{R_1} = \frac{(400+6370)}{(5240+6370)}.18820\frac{Km}{h} = 10974\frac{Km}{h}$$

12. A. El momento de inercia respecto al eje Z se obtiene de la integral definida:



$$I_Z = \int_0^a y^2.dm \ ; \ dm = \sigma.dS = \sigma.b.dy$$

$$I_Z = \int_0^a y^2.\sigma.b.dy = b.\sigma.\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^a = b.\sigma.\frac{a^3}{3}$$

Como la densidad superficial es:

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{M}{a.b} \quad \Leftrightarrow \quad I_Z = \frac{M.a^2}{3}$$

13. D. El campo creado en el interior de un solenoide, mucho más largo que ancho, se puede calcular a partir de la circulación del vector B a través de una línea cerrada (Ley de Ampère).

$$\oint_L \vec{B}.d\vec{l} = \mu_o.\sum i$$

La circulación a través de una línea cerrada e imaginaria L, es igual al producto de la permeabilidad magnética por la suma de corrientes que atraviesan esa línea.

Si suponemos que las líneas de campo magnético dentro del solenoide son rectas paralelas ello conlleva que el campo sea constante en el interior. Si suponemos también que las líneas fuera de la bobina están muy separadas, esto implica que el campo sea casi cero fuera de ella. Entonces la circulación sólo sería distinta de cero en el interior:

$$B.L.\cos 0^o = \mu_o.N.i \quad \Leftrightarrow \quad B = \frac{\mu_o.N.i}{L} = \frac{4.\pi.10^{-7}\frac{T.m}{A}.600.7{,}5\ A}{0{,}40\ m} = 1{,}41.10^{-2}\ T$$

El flujo sería:

$$\phi = N.B.S = 600.(1{,}41.10-2\ T).\pi.(0{,}025\ m)^2 = 1{,}66.10^{-2}\ Wb$$

14. A. El calor absorbido por la bola es igual a la energía potencial perdida por el bote:

$$Q = -\Delta E_P \Leftrightarrow m.C_e.\Delta T = m.g.\Delta h \quad \Leftrightarrow \quad \Delta T = \frac{g.\Delta h}{C_e} = \frac{9{,}8\, m/s^2\ .0{,}5\ m}{110\, cal/Kg.^oC\ .4{,}18\, J/cal} = 0{,}01^o C$$

15. D. Efectivamente, el coeficiente de restitución es cero en los choques plásticos o totalmente inelásticos. Es uno en choques elásticos y está comprendido entre cero y uno para los choques inelásticos. Por otro lado en todos los choques se conserva el momento lineal y el cinético, ya que en ellos actúan fuerzas internas que se anulan dos a dos. Y ,por último, sólo en los choques elásticos se conserva la energía cinética.

16. A. La aceleración sufrida por la rueda es:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\left(0-90\frac{rev}{min}.2.\pi.\frac{rad}{rev}.\frac{1\,min}{60\ s}\right)}{15\ s} = -0{,}628\frac{rad}{s^2}$$

Si aplicamos la 2ª Ley de Newton para la rotación, se tiene el momento de la fuerza:

$$M = I.\alpha = 25.Kg.m^2.\left(-0{,}628\frac{rad}{s^2}\right) = -15{,}71\,N.m \approx 5.\pi.N.m$$

Por cinemática, el ángulo recorrido hasta pararse es según la ecuación del movimiento acelerado:

$$\Delta\theta = \omega_o.t + \frac{1}{2}.\alpha.t^2 = \frac{90.2.\pi}{60}\frac{rad}{s}.15\,s + \frac{1}{2}.\left(-0{,}628\frac{rad}{s^2}\right).(15\,s)^2 =$$

$$70{,}7\,rad.\frac{1\,rev}{2.\pi\,rad} = 11{,}25\,rev$$

17. C. Sin carga no hay fuerza de Lorentz sobre una partícula que atraviesa un campo magnético. Entonces la trayectoria no se desvía y sigue siendo recta.
18. D. Véase para más detalle la pregunta 8 de la Superior de 1991.
19. A. Los transformadores funcionan con corrientes variables (con continuas no funcionan). El flujo magnético que atraviese el núcleo de hierro varía al variar la corriente de la entrada. Estas variaciones provocan por inducción (Ley de Faraday-Lenz), otra corriente en el bobinado secundario que se halla a la salida.
20. D. Como hemos dicho en la pregunta anterior, la corriente continua no provoca variación de flujo, luego no se forma corriente inducida en el secundario.
21. C. El vector intensidad de campo es el gradiente del potencial con el signo cambiado.

    La A no sirve, ya que una partícula conserva su energía potencial en un campo conservativo, sólo cuando llega a la misma situación de la que partió. Nótese que la energía potencial depende de la posición.

    En la C, se dice que la fuerza de rozamiento es conservativa y eso es falso.

    En la D, habría que afirmar que los campos de fuerzas centrales (como el que crean masas o cargas puntuales) son conservativos.
22. B. La intensidad dada en decibelios sigue la fórmula:

$$B = 10.\log\frac{I}{I_o}$$

Si las dos ondas difieren en 15 dB, una tendrá B y la otra 15+B:

$$\left.\begin{array}{l} B = 10.\log\dfrac{I}{I_o} \\ B' = B + 15 = 10.\log\dfrac{I'}{I_o} \end{array}\right\} se\ restan\ \ 15 = 10.\log\frac{I'}{I} \iff 1{,}5 = \log\frac{I'}{I}$$

Tomando antilogaritmos de la última expresión:

$$\frac{I'}{I} = 10^{1,5}$$

Las intensidades son proporcionales a la energía y ésta lo es al cuadrado de la amplitud, entonces:

$$\frac{I'}{I} = 10^{1,5} = \frac{(A')^2}{A^2} \iff \frac{A'}{A} = \sqrt{10^{1,5}} = 5{,}62$$

23. D. A los nodos de una onda estacionaria no llega la energía, ya que en estos puntos se produce una interferencia destructiva entre las dos ondas viajeras que producen la onda estacionaria.
24. C. En un proceso adiabático no hay transferencia de calor y entonces no puede haber incremento de entropía que se define como:

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$$

En las transformaciones isotermas (a T constante) sí hay intercambio de calor, luego habrá variación de entropía. (Anula la A).

La B no sirve ya que el rendimiento depende sola y exclusivamente de las temperaturas absolutas de los focos:

$$\eta = 1 - \frac{T_{FRIO}}{T_{CALIENTE}}$$

25. B. Comparando la expresión del enunciado con la de una onda:

$$\phi(x,t) = A.\text{sen}(\omega.t - k.x)$$

se obtiene:

$$\omega = 4.\frac{rad}{s} \quad ; \quad k = 5\frac{rad}{cm}$$

Para calcular la velocidad se dividen ambas magnitudes entre sí:

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{4}{5}.\frac{cm}{s} = 0{,}8\frac{cm}{s}$$