SOLUCIONES AL TEST 15

1. A. $\vec{V} = d\vec{a}/dt = \text{-}2.\text{sen } t\,\hat{i} \;+\; 2.\cos\ t\,\hat{j} \;+\; 4.\cos\ 2t\,\hat{k}$ Para calcular el módulo:

$$V = \sqrt{(\text{-}2.\text{sen } t)^2 \;+\; (2.\cos\ t)^2 \;+\; (4.\cos\ 2t)^2} \;=$$

$$= 2.\sqrt{(\text{sen } t)^2 \;+\; (\cos\ t)^2 \;+\; (2.\cos\ 2t)^2} = 2.\sqrt{1+(2.\text{sen } 2t)^2} =$$

$$= 2.\sqrt{1+(2.\text{sen } 45)^2} = 2.\sqrt{1+\left(2.\sqrt{2}/2\right)^2} = 2.\sqrt{1+2} = 2.\sqrt{3}$$

2. C. $\cos\alpha = \dfrac{10}{\sqrt{10^2+10^2+10^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{300}} = \dfrac{10}{10.\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \tan(30^\circ)$

3. D. De la definición de velocidad media se deduce:

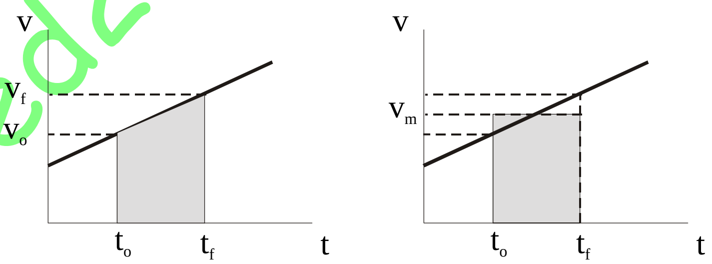
$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \;\Leftrightarrow\; \Delta\vec{r} = \vec{v}_m.\Delta t$$

La A es válida para un movimiento uniformemente acelerado en el eje *X*, independientemente de lo que suceda simultáneamente en los otros ejes. El movimiento podría ser curvo si existen velocidades distintas de cero en los otros ejes, como ocurre en los tiros parabólicos.

La B es absurda puesto que un movimiento uniforme tiene aceleración tangencial cero y hay movimiento.

La C es sólo válida para movimientos uniformes o uniformemente acelerados. El primer caso es evidente ya que si no cambia la velocidad instantánea, tampoco lo hace la media. El caso de un movimiento acelerado se explica mediante la gráfica de la velocidad frente al tiempo.

De la ecuación escrita al principio para la velocidad media sabemos que su valor multiplicado por el intervalo de tiempo da el vector desplazamiento. En el gráfico de la derecha esto se corresponde con el área del paralelogramo de base Δt y altura v_m que es la media aritmética de las velocidades inicial y final. Este área es la misma que la que posee el trapecio de la gráfica de la izquierda, cuya superficie da el desplazamiento en un eje por la definición de la integral:



$$\Delta e = \int_{t_o}^{t_f} v.dt$$

Las dos áreas siempre serán iguales siempre que la función representada sea una línea recta horizontal (movimiento uniforme) o una recta inclinada (movimiento uniformemente acelerado).

4. D. Como se ha dicho en la pregunta anterior, en cualquier tipo de movimiento si se representa la velocidad frente al tiempo, se puede obtener el desplazamiento calculando la integral

$$\Delta e = \int_{t_o}^{t_f} v.dt$$

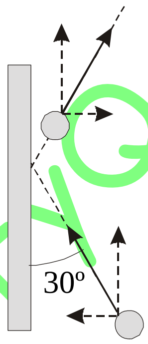
que se corresponde con el área comprendida entre la función y el eje de tiempos.

La celeridad instantánea cuya definición es

$$v = \frac{de}{dt}$$

se obtiene gráficamente de la representación de *e* frente a *t*. Se corresponde con la pendiente de la recta tangente a la función en un punto.

5. B. Como se observa en el gráfico, la componente paralela a la banda de la mesa se mantiene; la que cambia es la componente perpendicular a ella:



$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_o = (\vec{p}_{fy} + \vec{p}_{fx}) - (\vec{p}_{oy} + \vec{p}_{ox}) =$$

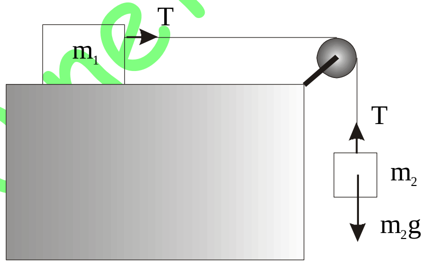
$$0{,}5\ Kg.1\ m/s\ .[(\text{sen } 30i + \cos 30\, j) - (-\text{sen } 30i + \cos 30\, j)] =$$

$$0{,}5\ Kg.1\ m/s\ .2.\text{sen } 30.i = 0{,}5.i.Kg.m/s$$

6. B. Cada muelle soporta la misma fuerza al estar unidos en serie. Si con una fuerza *F* se alargan *x* cada uno, con 2*F* se alargarán 2*x* .

7. C. La 2ª ley de Newton aplicada al conjunto de ambas masas da:

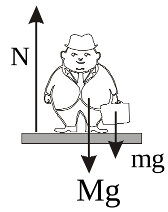
$$a = \frac{\sum F}{\sum m} = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}$$



La A es falsa puesto que la aceleración es igual para ambas masas sólo en módulo.

La B es falsa porque las tensiones de la cuerda son las mismas sobre ambos cuerpos. Serían diferentes en el caso de que la polea tuviese masa, entonces la tensión sería mayor en la masa que cuelga.

8. B. Aplicamos la 2ª ley de Newton desde un sistema inercial situado fuera del ascensor:



Para el hombre sólo: *N – Mg =M.a*

960 – *M*.10 = *M.a*

Para el hombre y la caja: *N – M.g – m.g = (M+m).a*

1200 – *M*.10 – 20.10 = (*M*+20).*a*

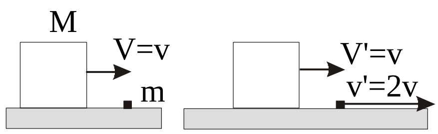
Si resolvemos este sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (M y a) resulta:

$$M = 80 \text{ Kg} \ ; \ a = 2{,}19\ m/s^2.$$

Con lo que el peso del hombre es aproximadamente, si tomamos g=9,8 m/s^2,

$$M.g = 785\ N\ .$$

9. C. En todo choque se conserva la cantidad de movimiento del sistema si la calculamos un instante antes y otro después del mismo. Esto es debido a la 2ª ley de Newton:



$$\sum \vec{F}.dt = d\vec{p}$$

Si el intervalo de tiempo es muy breve $dt \cong 0$ entonces $d\vec{p} \cong 0 \iff \vec{p} = cte$.

M.V = M.V' + m.v' 20000 . 10 = 20000 . *V'* + 0,01 . *v'*

Por otro lado el coeficiente de restitución "*e*" de un choque elástico vale la unidad:

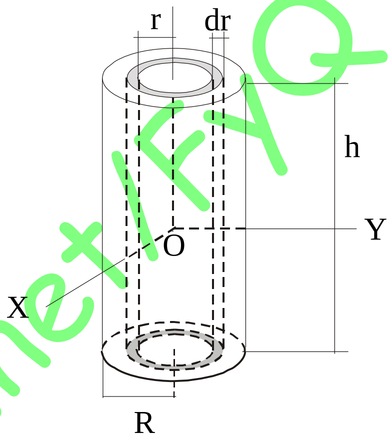
$$e = 1 = \frac{v' - V'}{V - 0} \iff V = v' - V' \iff 10 = v' - V'$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas sale aproximadamente:

$$v' = 20\ m/s \quad V' = 10\ m/s.$$

Esto sucede siempre que uno de los objetos tiene mucha masa comparado con otro muy pequeño que inicialmente se encuentra parado.

10. C. Puesto que no existe ningún desplazamiento paralelo a la fuerza no existe trabajo mecánico.
11. B. La A es falsa, ya que las dimensiones son $[v] = L.T^{-1}$ y las de $[\omega] = T^{-1}$.
    La C es evidentemente falsa ya que el momento de inercia es la suma de los productos de las masas por los cuadrados de las distancias que poseen las partículas del sólido al eje de giro.
    La D también es falsa por la definición anterior.
12. B. Para calcular el momento respecto de un eje se puede hacer sumando los momentos respecto a los planos cuyo corte da el eje en cuestión:



$$I_X = I_{XZ} + I_{XY}.$$

Para calcular I_{XZ} nos servimos de otra expresión análoga a la anterior, pero sobre el eje Z, del que vamos a calcular su momento de inercia:

$$I_Z = I_{ZX} + I_{ZY}.$$

Debido a la simetría de la figura $I_{ZX} = I_{ZY}$.

$$I_Z = 2 \,.\, I_{ZX} \,. \;\Rightarrow\; I_{ZX} = I_{XZ} = I_Z/2$$

Para calcular I_z , como se observa en la figura, los elementos de masa cuyos puntos se encuentran todos a la misma distancia del eje de giro son tubos huecos de radio r, espesor dr y altura h.

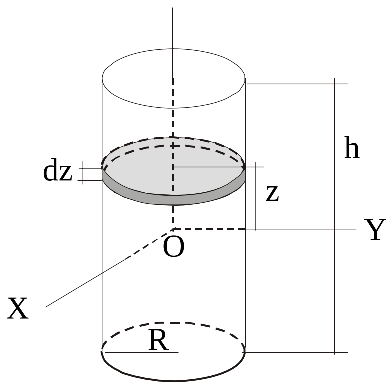
$$I_Z = \int r^2 .dm \,; \quad dm = \rho.dV = \rho.2.\pi.r.h.dr \quad ; \; I_Z = \int_0^R r^2 .\rho.2.\pi.r.h.dr$$

$$I_Z = \rho.2.\pi.h.\frac{R^4}{4} \quad ; \; M = \rho.V = \rho.\pi.R^2.h \quad ; \; I_Z = \frac{1}{2}.M.R^2$$

Entonces ya tenemos que :

$$I_{ZX} = \frac{1}{4}.M.R^2$$

Para calcular I_{YX} se toman elementos de masa dm cuyos puntos estén todos a la misma distancia del plano XY que pasa por el centro de gravedad. Estos puntos forman discos cilíndricos de radio R y espesor infinitesimal dz, como se observa en la figura.



$$I_{XY} = \int z^2 .dm$$

Como : $dm = \rho.dV = \rho.\pi.R^2.dz$, queda

$$I_{XY} = \int_{-h/2}^{h/2} z^2.\rho.\pi.R^2.dz = \rho.\pi.R^2.\frac{h^3}{12} \quad ;$$

La masa del cilindro es: $M = \rho.\pi.R^2.h$ que sustituida arriba da:

$$I_{XY} = \frac{1}{12}.M.h^2$$

Si unimos por fin las dos expresiones en $I_X = I_{XZ} + I_{XY}$ se obtiene:

$$I_X = \frac{1}{4}.M.R^2 + \frac{1}{12}.M.h^2 = \frac{M}{4}.\left[R^2 + \frac{h^2}{3}\right]$$

13. B. Por la tercera ley de Kepler, los cuadrados de los períodos son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas.
La A es falsa, la ley de las áreas dice que cuando las áreas barridas por un astro en su órbita son iguales los tiempos en recorrerlas también lo son (o sea, velocidad areolar constante).
La C es falsa, ya que la tangente a las líneas de campo en un punto indica la dirección de la intensidad de campo, y el sentido lo indica el mismo sentido de esas líneas.
La D es falsa ya que los campos no se propagan de forma instantánea a través del espacio.

14. A. Aplicando la ley de gravitación universal de Newton a las dos situaciones:

$$\frac{16}{9} = \frac{G.M.m \big/ R^2}{G.M.m \big/ (R+h)^2} \Leftrightarrow \frac{16}{9} = \left(\frac{R+h}{R}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{4}{3} = 1 + \frac{h}{6000\ Km} \Leftrightarrow h = 2000\ Km$$

15. C. Si aplicamos la 3ª ley de Kepler entre los períodos y los radios queda:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{8\ dias}{1\ día}\right)^2 = \left(\frac{d}{d'}\right)^3 \Leftrightarrow d' = \frac{d}{4}$$

16. C. Es cierta ya que el calor a presión constante es igual al de volumen constante más el trabajo de expansión.
La A es falsa ya que la capacidad calorífica de un cuerpo es la cantidad de calor necesaria para elevar un grado centígrado su temperatura, o sea $C = Q / \Delta T$.
La B es falsa totalmente ya que lo que caracteriza a un gas ideal o perfecto es que su energía interna depende sólo y exclusivamente de su temperatura absoluta.
La D es absurda ya que en la expansión cambia el volumen, luego no hay las mismas condiciones al final que al principio.

17. D. Si aplicamos la fórmula para el cambio de un escala a otra:

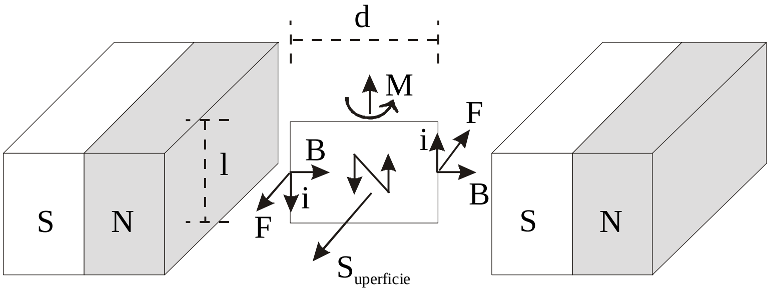
$$\frac{C - C_1}{C_2 - C_1} = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

en la que C es la temperatura en Celsius que queremos cambiar (en este caso la de la ebullición del agua a $100^{o}C$) y t la que tendría en otra escala. Los subíndices señalan las temperaturas de dos estados fijos o patrones, que en este caso serán los de las ebulliciones de los dos gases.

$$\frac{100 + 246}{-210 - (-246)} = \frac{t - 36}{54 - 36} \Leftrightarrow \frac{346}{36} = \frac{t - 36}{18} \Leftrightarrow t = 209^{o}$$

18. B. El momento que se ejerce sobre la espira resulta del producto vectorial:

$$\vec{M} = i.\vec{S} \times \vec{B}$$



Donde el vector superficie es normal a la superficie de la espira y su sentido es el de avance de un tornillo que gire como lo hace la corriente i. La espira girará hasta que su vector superficie sea de la misma dirección y sentido que el vector campo. De esta forma la cara Norte de la espira se enfrenta a la cara Sur de un hipotético imán que tuviese al lado.

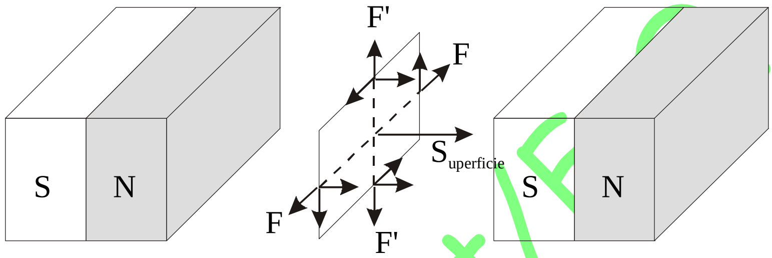
La explicación estriba en la fórmula de Lorentz sobre un trozo de hilo de corriente :

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}\,.$$

En el gráfico con la situación inicial se observa que sólo existen fuerzas sobre los lados verticales de la espira (una hacia fuera y otra hacia dentro del plano del dibujo), ya que en los lados horizontales el vector $i\vec{l}$ es paralelo al campo $\vec{B}$. Se produce un momento igual en módulo al producto de una de las fuerzas por la distancia d que las separa:

$$M = F.d.\text{sen } 90^{o} = ilB\,.\,d = i.S.B$$

En la situación final la fuerza de Lorentz produce pares de fuerzas F sobre los lados verticales y F' sobre los lados horizontales, que ahora no poseen momento por estar cada una de esas parejas en una misma recta.

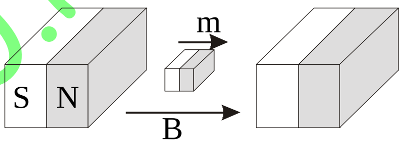


19. B. En la pregunta anterior se llama vector momento magnético de la espira:

$$\vec{m} = i.\vec{S}$$

Entonces la expresión del momento del par de fuerzas queda como:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$



La situación estable final es con el vector momento magnético paralelo al vector inducción magnética $\vec{B}$. En todo imán existe un vector momento magnético análogo al de las espiras (lo que explica la falsedad de la opción D) que también queda estable alineado con la dirección y el sentido de $\vec{B}$.

La A es falsa por la definición de la $\vec{F}$ como producto vectorial:

$$\vec{F} = q.\vec{v} \times \vec{B}$$

que siempre será perpendicular a los vectores a partir de los que está definido (vector $\vec{v}$ y vector $\vec{B}$).

La C es falsa ya que el período es independiente del radio de la trayectoria:

$$T = \frac{2.\pi.m}{q.B}$$

lo cual constituye el fundamento de los aceleradores de partículas como el ciclotrón, que consiguen que la partícula realice un trayectoria espiral con radios y velocidades cada vez mayores.

20. D. La fuerza por unidad de longitud entre dos conductores rectos e infinitamente largos separados por una distancia d y atravesados por sendas corrientes i_1 e i_2 es:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu.i_1.i_2}{2.\pi.d}$$

Podemos aproximar esta fórmula al caso de que los conductores sean finitos y de longitud l y entonces la fuerza entre ellos será:

$$F = \frac{\mu.i_1.i_2}{2.\pi.d}.\,l = \frac{4.\pi.10^{-7}.10.10}{2.\pi.0{,}02}.\,2 = 2.10^{-3}\ N$$

Si aplicamos la Ley de Hooke al resorte que une a los conductores nos da una compresión:

$$\Delta x = \frac{F}{K} = \frac{2.10^{-3}\ N}{1\ N/m} = 2.10^{-3}\ m = 2\ mm$$

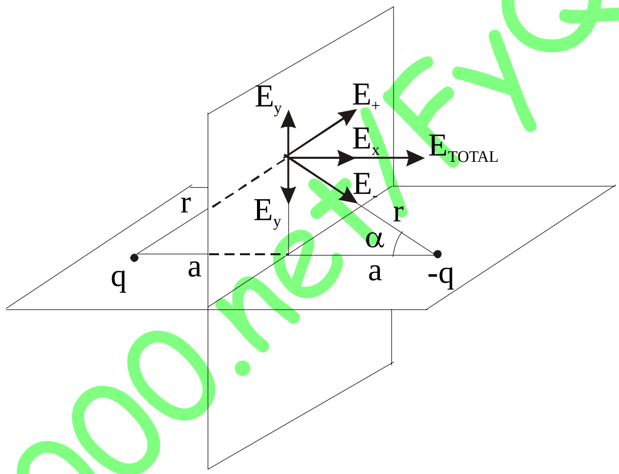
21. Si aplicamos la Ley de Faraday-Lenz al flujo que atraviesa la espira:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(-0{,}4.t + \frac{t^2}{10}\right) = (0{,}4 - 0{,}2.t)V$$

22. B. Es la menos incorrecta de las cuatro opciones, ya que se basa en la expresión:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\ V = -\left(\frac{dV}{dx}.i + \frac{dV}{dy}.j + \frac{dV}{dz}.k\right)$$

entonces si el potencial V es cero en esa región al calcular sus derivadas parciales también dará cero y el campo será cero. Pero también es verdad, que en el plano mediatriz de un dipolo el potencial es cero (por estar todos sus puntos a igual distancia de las dos cargas del dipolo), pero allí el campo no es cero. Como se observa en el gráfico, se anulan las componentes verticales pero queda una resultante horizontal que es el doble de la que produce cada una de las cargas.



La opción A es falsa, ya que en el interior de un conductor cargado en equilibrio, el campo es cero, pero el potencial es constante y distinto de cero en todo su volumen.

La opción C es falsa ya que las líneas de campo señalan los potenciales decrecientes, afirmación que tiene su expresión matemática en la fórmula escrita en la opción B anterior.

La opción D es falsa, por lo dicho en la A.

23. C. La sensación sonora, sonoridad o nivel de intensidad sonora en decibelios (B) depende de la intensidad de la onda sonora (I) como:

$$B = 10.\log\frac{I}{10^{-12}} \Leftrightarrow 3 = 10.\log\frac{I}{10^{-12}} \Leftrightarrow I = 10^{3/10}.10^{-12} = 1{,}99.10^{-12}\ \frac{w}{m^2}$$

24. A. La frecuencia de un armónico es tantas veces mayor que la del 1^er^ armónico como sea el nº del armónico.

La D es falsa ya que la energía de la onda es proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia angular:

$$E = \frac{1}{2}.K.A^2 = \frac{1}{2}.m.\omega^2.A^2$$

25. A. La velocidad de propagación de las ondas sonoras en un líquido depende del módulo de compresibilidad (B en N/m^2) o de su inverso que es el coeficiente de compresibilidad (K en m^2/N), además de la densidad del líquido (ρ en Kg/m^3) según la fórmula:

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{K.\rho}} = \sqrt{\frac{1}{4{,}8.10^{-10}.1018{,}3}} = 1430{,}35\ m/s$$